ISSN 2186-5647

－日本大学生産工学部第44回学術講演会講演概要（2011-12-3）－

7-30

対基底の理論と応用（その４）

－自己双対LP－

日大生産工　○篠原　正明

情報システム研究所　篠原　健

１、はじめに

あるLPの双対問題が元のLPと等しい場合に、そのＬＰを自己双対（self-dual）LPと言う。自己双対LPでは、主実行可能条件(pfc)を満たす解xは、双対実行可能条件(dfc)をも満たし、最適解となる。すなわち、１つの基底解に注目した時に、そのpfcとdfcが等価となることが予想できる。本論文ではそれを証明する。

２、自己双対LPについて

以下の主問題PLPと双対問題DLPを考える。

[PLP]

目的関数：$z=\mathbf{c}^T\mathbf{x} \rightarrow \max$　　(1)

制約条件：$Ax \leqq b$　　(2)

$x \geqq 0$　　(3)

[DLP]

目的関数：$w=\mathbf{b}^T y \rightarrow \min$　　(4)

制約条件：$\mathbf{A}^T y \geqq c$　　(5)

$y \geqq 0$　　(6)

もし、「$A=-\mathbf{A}^T, b=-c$」が成立するならば、DLPはDLP1, DLP2と変形できる。

[DLP1]

$w=-\mathbf{c}^T y \rightarrow \min$　(7)

$-Ay \geqq -b$　　(8)

$y \geqq 0$　　(9)

[DLP2]　$-w=\mathbf{c}^T y \rightarrow \max$　　(10)

$Ay \leqq b$　　(11)

$y \geqq 0$　　(12)

DLP２にて、$-w$をz, yをxと置換すればPLPに一致する。従って、不等号標準型のPLPにおいて「$A=-\mathbf{A}^T, b=-c$」が成立すれば、自己双対ＬＰとなる。

３、主・双対問題間の対基底と主・双対実行可能条件（文献[1]より）

[1]の性質４より、主・双対問題間の「一対の基底」において、PLPのある基底のpfcとdfcは、DLPの対応する基底のdfcとpfcにそれぞれ等価であることを証明した。[1]の表記法に従うならば、PLPのある（基底B、非基底N）に対応するpfcとdfcは(13), (14)で与えられる。

$$\mathrm{pfc}: B_p^{-1}b=\begin{pmatrix} U & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} b_{N1} \\ b_{B1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} b_{N1}-A_{12} & A_{22}^{-1}b_{B1} \\ A_{22}^{-1} & b_{B1} \end{pmatrix} \geqq 0 \quad (13)$$

$$\mathrm{dfc}: C_B^T B_p^{-1} N_p - C_N^T$$

$$=(C_{B1}^T, C_{B2}^T)\begin{pmatrix} U & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A_{11} \\ U & A_{21} \end{pmatrix}-(C_{N1}^T, C_{N2}^T)$$

$$=(C_{B2}^T A_{21}^{-1},\ C_{B2}^T A_{22}^{-1}A_{21}-C_{N2}^T) \geqq 0 \quad (14)$$

４、自己双対ＬＰの基底の主・双対実行可能条件

以下に、自己双対LPでは、すなわち、「$A=-\mathbf{A}^T$、$b=-c$」が成立するPLPでは任意の基底において、pfcとdfcが等価であることを証明する。

係数行列Aは(15)で与えられるゆえ、歪対称行列「$A=-\mathbf{A}^T$」では、(16)が成立する。

Theory of Dual Basis in Linear Programming and Its Application
—Part 4: Self Dual Linear Programming—

Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} A_{11}{}^T & A_{21}{}^T \\ A_{12}{}^T & A_{22}{}^T \end{pmatrix} \quad (16)$$

すなわち、 $A_{11} = -A_{11}{}^T$ (17)

$A_{12} = -A_{21}{}^T$ (18)

$A_{21} = -A_{12}{}^T$ (19)

$A_{22} = -A_{22}{}^T$ (20)

又、「b=-c」なので、次式が成立する。

$$b=\begin{pmatrix} b_{N1} \\ b_{B1} \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} c_{N2} \\ c_{B2} \end{pmatrix}=-c \quad (21)$$

すなわち、$b_{N1} = -C_{N2}$ (22)

$C_{B1} = -C_{B2}$ (23)

(14)のdfcの第１要素を転置し、(20)と(23)を代入すると(24)を得る。

$$(A_{22}{}^{-1})^T C_{B2}=(A_{22}{}^T)^{-1} C_{B2}$$

$$=-A_{22}{}^{-1}(-b_{B1})$$

$$= A_{22}{}^{-1} b_{B1} \geqq 0 \quad (24)$$

(24)は(13)のpfcの第２要素と同じである。

(14)のdfcの第２要素を転置し、(18),(20),(22),(23)を代入すると、(25)となる。

$$A_{21}{}^T(A_{22}{}^{-1})^T C_{B2}-C_{N2}=A_{21}{}^T(A_{22}{}^T)^{-1}C_{B2}-C_{N2}$$

$$=(-A_{12})(-A_{22})^{-1}(-b_{B1})-(-b_{N1})$$

$$=b_{N1}-A_{12}A_{22}{}^{-1}b_{B1} \geqq 0 \quad (25)$$

(25)は(13)のpfcの第１要素と同じである。

5、考察

5.1 対基底の視点

[1]の性質４より、PLPのある基底のpfc(あるいはdfc)はDLPの対応する基底のdfc(あるいはpfc)に等価である。自己双対LPではPLPとDLPが同じなので,PLP(あるいはDLP)の任意の基底でpfcとdfcが等価となることが予想されるが、それを直接に証明した。

5.2 KKT条件の視点

PLPに対する1次のKKT最適性必要条件は以下(26)~(31)で与えられる(導出は[2]参照)。

$$y^T(b - Ax) = 0 \quad (26)$$

$$x^T(A^T y - c)=0 \quad (27)$$

$$x \geqq 0 \quad (28)$$

$$y \geqq 0 \quad (29)$$

$$Ax \leqq b \quad (30)$$

$$A^T y \geqq c \quad (31)$$

ここで、yはPLPの制約(2)に対するラグランジュ未定乗数ベクトルであり、DLPの変数（双対変数）となる。

(26)~(31)のKKT条件は、<u>基底に限定されず</u>一般的に成立することが要求される条件であり、(26)~(31)を満たす(x、y)が存在すれば、それは(特にxは)PLPの最適解となる。xが(28),(30)を満足することが基底でのpfc,yが(29),(31)を満足することが基底でのdfcに帰着する。

以下にPLPが自己双対LPの場合のKKT条件を考察する。まず、(26)にb=-c,A=-A^Tを代入すると、

$$y^T(-c + A^T x) = y^T(A^T x - C) = 0 \quad (32)$$

同様に(27)は(33)となる。

$$x^T(-Ay + b) = x^T(b - Ay) = 0 \quad (33)$$

すなわち、xとyを入れ替えれば、(32)は(27)、(33)は(26)と等価である。

又、(30)は(34)に、(31)は(35)となる。

$-A^T x \leqq -c$ すなわち$A^T x \geqq c$ (34)

$-Ay \geqq -b$ すなわち $Ay \leqq b$ (35)

xとyを入れ替えれば、(34)は(31),(35)は(30)となる。

以下をまとめると、自己双対LPにおいては、相補性条件(26),(27)ならびに不等号制約(28)~(31)において、主変数xが満足すべき条件(pfcに対応)と双対変数yが満足すべき条件(dfcに対応)が等価であると言える。

参考文献

[1] 篠原正明：線形計画の双対概念に関する若干の性質—対基底の概念、正変数等長性定理—、日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表論文集、pp.55-56(1973.11)

[2] 篠原正明、篠原健：対基底の理論と応用(その5)—ＫＫＴ解法によるＬＰ強相補最適解—、平成23年度日本大学生産工学部第44回学術講演会・数理情報部会講演論文集(2011.12).