

遊戯ゲームの情報構造と数理分析

－（その6）4すくみジャンケンポンゲームのLP基底解アプローチ－

日大生産工

○篠原 正明

情報システム研究所

篠原 健

1. はじめに

LP基底解アプローチにもとづき対称型2人零和行列ゲームに属する巡回的4すくみジャンケンゲームのミニマクス均衡戦略を考察する。n戦略巡回的すくみ・対称型2人零和行列ゲームでn=奇数の場合には、文献[1]においてLP基底解アプローチに基づき、Aを最大化プレイヤーの利得行列とすると同時に同時方程式 $Ax = 0$ あるいは $A^T x = 0$ の非自明・非負解 ($x \geq 0$) を求めることに帰着することを確認した。しかし、文献[2, 4]のシミュレーションなどの結果から推察すると、n=偶数の場合には、必ずしも $Ax = 0$ の非自明・非負解に帰着できるわけではない。そこで、[1]で採用したLP基底解アプローチを適用することにより、4すくみジャンケンポンゲームのミニマクス均衡戦略を解析的に導出する。

2. 考察対象の巡回的4すくみジャンケンと世界の4すくみジャンケン([3]など)

プレイヤーI、IIにとって、手1（確率 x_1, y_1 ）、手2（確率 x_2, y_2 ）、手3（確率 x_3, y_3 ）、手4（確率 x_4, y_4 ）の4つの戦略を構成要素とする巡回的4すくみ2人ゲームを考察する。但し、4つの手1～手4の間の優越関係を図1に示す。但し、手1は手2に勝ち、手2は手3に勝ち、手3は手4に勝ち、手4は手1に勝ち、と読む。

参考のために、フランス、ドイツ、アメリカの4すくみジャンケンの優越関係を図2に示すが、表1に示す各戦略の具体的な対応関係の下では3つとも同型である。すなわち、考察対象とする巡回的4すくみジャンケン（図1）は、図2の世界の4すくみジャンケンに

おいて、③→①、④→②の優越関係が相子となる場合（あるいは $a_{31}=0, a_{42}=0$ ）に相当する。なお、中国には、手1～手4を虎、鶏、虫、棒と対応した本論文で考察対象とする巡回的4すくみジャンケンと同じジャンケンが存在する。

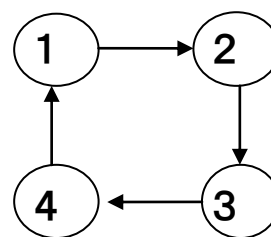


図1：4つの戦略（手1～4）の間の巡回的優越関係

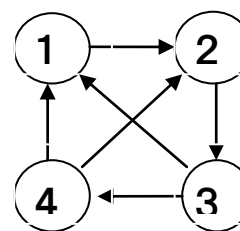


図2：世界の4すくみジャンケンの4つの戦略（手1～4）の間の優越関係

表1：戦略と具体的な手の対応関係

	手1	手2	手3	手4
フランス	石	鋏	葉	井戸
ドイツ	石	鋏	紙	井戸
アメリカ	鉛筆	紙	石	鋏

3. n=4の場合の優越戦略相互関係と基底変数

相互に最適戦略を採用している以下の均衡状態を想定しよう。『プレイヤーIが「手1」を出す確率が正 ($x_1 > 0$) とすれば、プレイヤーIIはそれに優越する「手4」を出すことになり、その確率も正 ($y_4 > 0$)

となる。すると、プレイヤーⅠは「手4」に優越する
「手3」を出すことになり、その確率も正 ($x_3 > 0$)
となる。すると、プレイヤーⅡは「手3」に優越する
「手2」を出すことになり、その確率も正 ($y_2 > 0$)
となる。……』以上のプレイヤーⅠ、Ⅱの間の採用戦
略の相互関係 (の続き) を図3に示す。

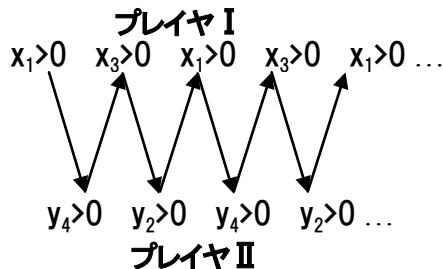


図3：4すくみジャンケンゲームの優越戦略の両プレイヤー間の相互関係 (その1)

同様に、最初にプレイヤーが「手2」を出す確率が正とすれば、図4の優越戦略の相互関係 (その2) を得る。同様に図3、4の背理法を図5、6に示す。但し、 $a_{12} > 0$, $a_{23} > 0$, $a_{34} > 0$, $a_{41} > 0$, を仮定する。

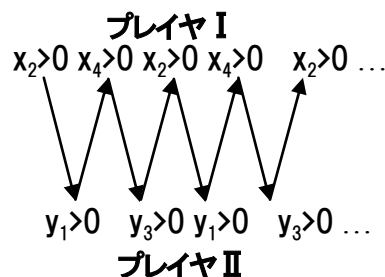


図4：優越戦略の両プレイヤー間の相互関係 (その2)

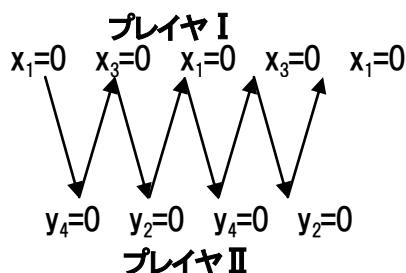


図5：優越戦略の相互関係・背理法 (その1)

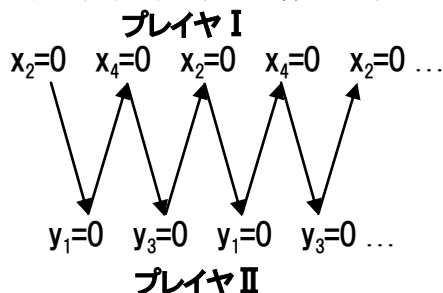


図6：優越戦略の相互関係・背理法 (その2)

これら一連の両プレイヤー間の優越戦略の連鎖図は、図3では……「プレイヤーⅠの奇数戦略群 (x_1, x_3) の内の1つの採用確率が正ならば他も正となる」、図5では……「プレイヤーⅠの奇数戦略群 (x_1, x_3) の内の1つの採用確率が0ならば他も0となる」、等を意味している。

従って、 $n=4$ の場合にはプレイヤーⅠとⅡがとりうる戦略に関して以下の3つの Case が存在する。

[Case1] 全戦略 (奇数解+偶数解) : プレイヤⅠ、Ⅱともにすべての戦略をとりうる。

[Case2] 奇数 (群) 戦略 : プレイヤⅠ、Ⅱともに奇数群戦略のみをとる。

[Case3] 偶数 (群) 戦略 : プレイヤⅠ、Ⅱ共に偶数群戦略のみをとる。

なお、対称ゲームなので、最適解では $x = y$ となり、プレイヤーⅠが奇数群でプレイヤーⅡが偶数群戦略という場合は存在しない。又、Case1 の場合が $x_1 \sim x_4$ がすべて基底変数となり[1] (その5) の基底解アプローチがそのまま適用できる。Case2 の場合が $x_0 = \{x_1, x_3\}$ が基底、 $x_e = \{x_2, x_4\}$ が非基底、Case3 の場合が $x_e = \{x_2, x_4\}$ が基底、 $x_0 = \{x_1, x_3\}$ が非基底に各々選ばれる。

4. Case 1 (全戦略) の解析

Case 1 では $x_1 \sim x_4$ すべてが基底変数となり、以下の同次方程式 (1) が非自明・非負解 $x \geq 0$ を持てば、それが求める最適解=ミニマクス均衡戦略である。

$$Ax = 0 \quad (1)$$

$n=4$ の場合には[1]の(24)より変数を再整理すれば (2), (3) となる。

$$\begin{pmatrix} -a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & -a_4 \\ 0 & 0 & -a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 & -a_4 \\ 0 & 0 & -a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

行列 G 、ベクトル x_0, x_e を(5), (6), (7)で定義すれば、(4)を得る。

$$\begin{pmatrix} 0 & G \\ -G^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4) \quad G = \begin{pmatrix} a_1 & -a_4 \\ -a_2 & a_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (6) \quad x_e = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (7)$$

すなわち、(8), (9)を得る。

$$Gx_e = 0 \quad (8) \quad Gx_0 = 0 \quad (9)$$

従って、 $|A|=0$ の条件は $|G|=0$ と等価となり、(10)が成立する時に(1)、すなわち(8)、(9)は非自明解を持つと言える。

$$|A|=|G|^2=(a_1a_3-a_2a_4)^2=0$$

$$a_1a_3=a_2a_4 \quad (10)$$

これ以降の具体的な解の導出は[1] 5章の式(25)~(28)を参照して下さい。

5, Case2(奇数戦略)の解析

LP 定式化[MaxLP-2] ([1] 2章の式(5)~(11)参照)の拡大係数行列を D_E (添字 E は extended (拡大))、は(12)で与えられる。

$$x_E = (x_0 \ x_e \ S \ P_0 \ P_e \ t)^T \quad (11)$$

$$D_E = \begin{pmatrix} 0 & G & 1 & I_0 & 0 & 0 \\ -G^T & 0 & 1 & 0 & I_e & 0 \\ 1^T & 1^T & 0 & 0^T & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

但し、 x_E は拡大変数であり、以下の通り。

x_0 : 奇数戦略変数ベクトル

x_e : 偶数戦略変数ベクトル

s : MaxLP-1 の目的関数

P_0, P_e, t : スラック変数

I_0, I_e : 単位行列

すると、奇数戦略では x_0, S, P_e が基底変数となるので、(13)式を満たす基底解 x_B が pfc と dfc を共に充足することを示せばよい。

$$Bx_B = b \quad (13)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -G^T & 1 & I_e \\ 1^T & 0 & 0^T \end{pmatrix} \quad (14) \quad x_B = \begin{pmatrix} x_0 \\ S \\ P_e \end{pmatrix} \quad (15) \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

(13)式を詳細に展開すると、(17)~(19)を得る。(17)より、 $s=0$ なので、(18)は(20)となる。

$$1s=0 \quad (17) \quad -G^T x_0 + 1S + P_e = 0 \quad (18)$$

$$1^T x_0 = 1 \quad (19) \quad G^T x_0 = p_e \quad (20)$$

pfc は $x_B \geq 0$ なので、 $p_e \geq 0$ より、(21)~(23)を満たす x_0 が求めれば pfc は充足する。ところで、この基底解は、自己双対 LP[MaxLP-1]の基底解でもあるので、pfc が充足された時点で、MaxLP-1 の最適基底解である。

$$G^T x_0 \geq 0 \quad (21) \quad 1^T x_0 = 1 \quad (22) \quad x_0 \geq 0 \quad (23)$$

(21)の条件は以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ -a_4 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$a_1 x_1 \geq a_2 x_3 \quad (25) \quad a_3 x_3 \geq a_4 x_1 \quad (26)$$

$$(25) \text{ と } (26) \text{ は } (27) \text{ となる。} \quad \frac{a_1}{a_2} \geq \frac{x_3}{x_1} \geq \frac{a_4}{a_3} \quad (27)$$

又、係数 $a_1 \sim a_4$ の間には(28)が成立する。

$$a_1 a_3 \geq a_2 a_4 \quad (28)$$

[例題 5.1] $a_1 = 5, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4$ とすると、(28)が成立し、従って、奇数戦略 (x_1, x_3) が優越し、以下で与えられる。

$$\frac{4}{3} \leq \frac{x_3}{x_1} \leq \frac{5}{2} \quad (29) \quad x_1 + x_3 = 1 \quad (30) \quad x_1 \geq 0, x_3 \geq 0 \quad (31)$$

(29)~(31)の解を一般的に図7に図示する。ここで、 $x_0(a) = (a_3/(a_3+a_4), a_4/(a_3+a_4))^T$ と $x_0(b) = (a_2/(a_1+a_2), a_1/(a_1+a_2))^T$ の凸結合が奇数戦略を与える。

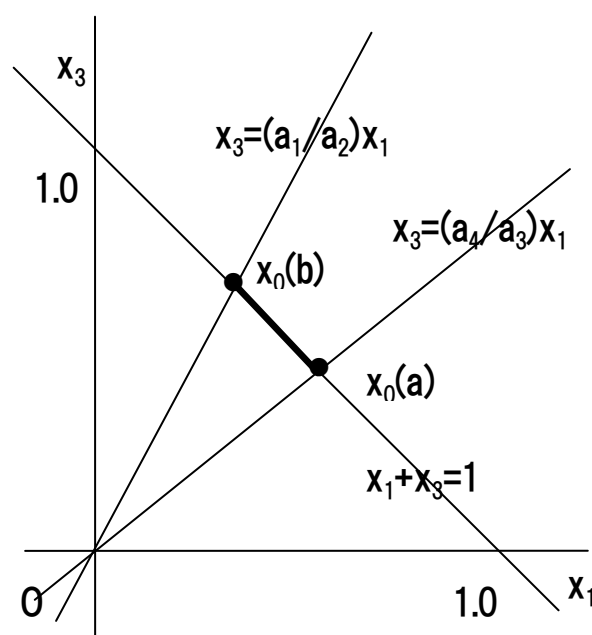


図7 : n=4での奇数戦略解

例題5.1では $x_0(a)=(3/7, 4/7)^T, x_0(b)=(2/7, 5/7)^T$ となる。[4]の最適戦略シミュレーション結果から、[2]では $x_0(a)$ あるいは $x_0(b)$ が最適戦略としたが、本論文の研究結果から正しくは、「 $x_0(a)$ と $x_0(b)$ の凸結合」である。

すなわち、Case2の奇数戦略のみが採用される場合でも、

(27) 式を満足する必要がある、本例では(29)を満足しない。例えば以下の奇数戦略 (32) あるいは (33)

は許容されない。

$$x_1=1, x_3=0 \quad (32) \quad x_1=0, x_3=1 \quad (33)$$

(例題5.1終わり)

6. Case 3 (偶数戦略) の解析

(12) 式の拡大係数行列 D_E において、偶数戦略では x_e, s, P_0 が基底変数となるので、(34)式を満たす基底解 x_E がpfcを充足することを示せば、MaxLP-1の自己双対性により、最適基底解である。

$$Bx_E = b \quad (34)$$

$$B = \begin{pmatrix} G & 1I_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1^T & 0 & 0^T \end{pmatrix} \quad (35) \quad x_E = \begin{pmatrix} x_e \\ s \\ P_0 \end{pmatrix} \quad (36) \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

(34)を詳細に展開すると、(38)~(40)を得る。

$$Gx_e + 1s + P_0 = 0 \quad (38) \quad 1s = 0 \quad (39) \quad 1^T x_e = 1 \quad (40)$$

(40)

(39)より、 $s=0$ となり、(38)は(41)となる。

$$P_0 = -Gx_e \quad (41)$$

pfcは $s=0, P_0 \geq 0, x_e \geq 0$ なので、(42)~(44)の条件を満足する x_e がpfcを充足する解(すなわち、最適戦略)である。

$$Gx_e \leq 0 \quad (42) \quad 1^T x_e = 1 \quad (43) \quad x_e \geq 0 \quad (44)$$

(42)の条件は以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} a_1 & -a_4 \\ -a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

$$a_1 x_2 \leq a_4 x_4 \quad (46) \quad a_3 x_4 \leq a_2 x_2 \quad (47)$$

(46)と(47)より(48)、係数 $a_1 \sim a_4$ には(49)が成立する。

$$\frac{a_1}{a_4} \leq \frac{x_4}{x_2} \leq \frac{a_2}{a_3} \quad (48) \quad a_2 a_4 \geq a_1 a_3 \quad (49)$$

[例題6.1] $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4$ とすると、(49)が成立し、偶数戦略は以下で与えられる。

$$\frac{1}{4} \leq \frac{x_4}{x_2} \leq \frac{2}{3} \quad (50) \quad x_2 + x_4 = 1 \quad (51)$$

$$x_2 \geq 0, x_4 \geq 0 \quad (52)$$

すなわち、 $x_e(a) = (0.6, 0.4)^T, x_e(b) = (0.8, 0.2)^T$ の凸結合となる。(例題6.1終わり)

7. おわりに

n戦略巡回的すくみ・対称型2人零和行列ゲームの $n=4$ の場合について、LP基底解にもとづき最適戦略(ミニマクス均衡戦略)を導出した。

すなわち奇数戦略利得積 $a_1 a_3$ が偶数戦略利得積 $a_2 a_4$ を上回れば($a_1 a_3 - a_2 a_4 > 0$)、Case2の奇数戦略優越、逆ならば($a_1 a_3 - a_2 a_4 < 0$)、Case3の偶数戦略優越、両者が等しいときは($a_1 a_3 = a_2 a_4$)、Case1の偶奇混合の全戦略となる。なお、本結果は $n=2$ の場合(コイン投げ、コイン出しゲーム)において、戦略1を表、戦略2を裏とする時、(53)、(54)の利得行列において、 $a_1 > 0$ ならば「表」の戦略1が、 $a_1 < 0$ ならば「裏」の戦略2が優越戦略となることの自然な拡張となっている。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (53) \quad G = (a_1) \quad (54)$$

参考文献

- [1] 篠原正明, 篠原 健: 遊戯ゲームの情報構造と数理分析—(その5) 奇数すくみジャンケンポンゲームのLP基底解アプローチ—, 第44回日本大学生産工学部・学術講演会・数理情報部会 (2011. 12. 3).
- [2] 篠原正明, 篠原 健: 遊戯ゲームの情報構造と数理分析—(その4) n すくみ巡回ジャンケンポンゲームの提案—, 第43回日本大学生産工学部・学術講演会・数理情報部会 (2010. 12. 4).
- [3] 世界のじゃんけん
<http://www.netlaputa.ne.jp/~tokyo3/janken.html>
- [4] 小川元喜: 「三すくみと四すくみじゃんけんゲームの均衡分析」、平成21年度 日本大学生産工学部数理情報工学科 卒業研究論文(2010. 2)