ISSN 2186-5647

7-28

遊戯ゲームの情報構造と数理分析

―（その５）奇数すくみジャンケンポンゲームのLP基底解アプローチ―

日大生産工　　○篠原　正明　　情報システム研究所　　篠原　健

１．はじめに

2人零和ゲームのミニマクス均衡解は、線形計画法(LP)により定式化できるので、LP基底解の概念にもとづき、n手を持つジャンケンポンゲームをｎ戦略巡回的対称型2人零和行列ゲームと見なし、n=奇数の場合について、基底解にもとづき最適戦略を導出する。

２．２人零和行列ゲームのLP定式化

最大化プレイヤの利得行列をAとすると、最大化プレイヤの利得最大化ミニマクス均衡戦略は以下の(1)～(4)でMaxLP-1と定式化できる。

[MaxLP-1]

$$z = s \to \max \quad (1)$$

$$A^T x \geq s1 \quad (2)$$

$$1^T x = 1 \quad (3)$$

$$x \geq 0 \quad (4)$$

不等号標準型では、以下のMaxLP-2((5)～(7))となる。

[MaxLP-2]

$$z = c^T u \to \max \quad (5)$$

$$Du \leq b \quad (6)$$

$$u \geq 0 \quad (7)$$

$$u = \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \quad (8) \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$D = \begin{pmatrix} -A^T & 1 \\ 1^T & 0 \end{pmatrix} \quad (10) \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

ここで、MaxLP-1の(3)は本来は等号制約であるが、(12)の不等号制約に置換してMaxLP-2への変換を議論した。

$$1^T x \leq 1 \quad (12)$$

MaxLP-1において、(3)を(12)の不等号制約に置換しても、最適解では等号が実現されるので、LP問題MaxLP-1の最適解はMaxLP-2よっても得られる。又、不等号標準型MaxLP-2では、主実行可能条件(pfc)と双対実行可条件(dfc)が等号・不等号混在標準型と比較して簡潔であり、議論が容易である。

３．n=3の場合の優越戦略相互関係と基底変数

プレイヤⅠ、Ⅱにとって、グー(確率x1,y1)、チョキ(確率x2,y2)、パー(確率x3,y3)の３戦略を構成要素とする３すくみ２人ゲームを考察する。相互に最適戦略を採用している以下の均衡状態を想定しよう。

『プレイヤⅠが「グ」を出す確率が正(x1>0)とすれば、プレイヤⅡはそれに優越する「パ」を出すことになり、その確率も正(y3>0)となる。すると、プレイヤⅠは「パ」に優越する「チ」を出すことになり、その確率も正(x2>0)となる。すると、プレイヤⅡは「チ」に優越する「グ」を出すことになり、その確率も正(y1>0)となる。・・・・』

Information Structure and Mathematical Analysis of Amusement Game
-Part 5- Odd-Cyclic Dominance “JanKen” Game via LP Basis Solution
Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

以上のプレイヤⅠ、Ⅱの間の採用戦略の相互関係（の続き）を図1に示す。

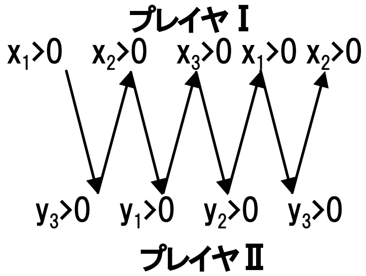

図1：3すくみジャンケンポンゲームの優越戦略の両プレイヤ間の相互関係

図1より、もしプレイヤⅠが「グ」を出す確率が正(x1>0)ならば、均衡状態では、(x2>0, x3>0)が成立する。すなわち、相互に最適戦略を採用する均衡状態では、(13)、(14)が成立する。

x1>0, x2>0, x3>0 (13)　　y1>0, y2>0, y3>0 (14)

但し、利得行列Aにおいて、a12>0 , a23>0 , a31>0を仮定する([1](その4)の(1)参照)。

又、対称ゲームでもあるので、(15)も成立する。

xi=yi (i=1,2,3) (15)

すなわち、LP定式化MaxLP-1あるいはMaxLP-2において、x1, x2, x3が基底変数となることが要求される。

同様の帰結は、図1の論理の背理法によっても得られる。すなわち、もしプレイヤⅠが「グ」を全く出さない(x1=0)ならば、プレイヤⅡはそれに優越する「パ」を出す必要は皆無(y3=0)となる。するとⅠは「パ」に優越する「チ」を出す必要も皆無(x2=0)となる。図2に示すように、x1=0とすると、x2=0、x3=0となってしまい、これは、矛盾する。よって、x1>0, x2>0, x3>0となる。

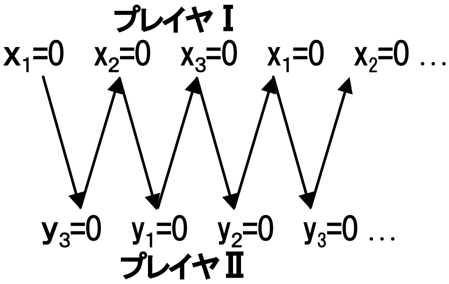

図2：図1の論理の背理法の解説図

4．n=3の基底解アプローチ

MaxLP-2において、xとsを基底変数とした時に基底解が満たすべき方程式を以下に示す。

$$\begin{pmatrix} -A^T & 1 \\ 1^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

すなわち、(16)、(17)となる

$$A^T x = s1 \quad (16)$$

$$1^T x = 1 \quad (17)$$

対称ゲームの最適値は0なので、(16)においてs=0を仮定すると、(18)、(19)を得る。

$$A^T x = 0 \quad (18)$$

$$1^T x = 1 \quad (19)$$

従って、同時方程式(18)と正規化条件(19)を満足する解で、かつ$x_B \geqq 0$を満足すれば、この基底解($x_B \geqq 0$, s=0)はpfcを充足している。もし、この基底解($x_B \geqq 0$, s=0)がdfcをも充足すれば、注目する基底解は、MaxLP-2(従って、MaxLP-1)の最適解であることが証明できる。以下にこれを示す。

対応する基底のｄｆｃは(20)で表現できる。

$c_N^T - c_B^T B^{-1} N \leqq 0^T$ (20)

ここで、Bは基底行列で(21)、Nは非基底行列で(22)で、c_Nは(23)で与えられる。

$$B = \begin{pmatrix} -A^T & 1 \\ 1^T & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

N=I (22)　　c_N=0 (23)

(21)、(22)、(23)を(20)に代入するとｄｆｃ成立は(24)を示せばよい。

$-c_B^T B^{-1} \leqq 0^T$ (24)

ここで、左辺をv^Tと置くと(25)を得る。

$v^T = (v_1^T, v_2^T) = -c_B^T B^{-1}$ (25)

すなわち、(26)～(29)を得る。

$(v_1^T, v_2^T) B = -c_B^T$ (26)

$$\begin{pmatrix} v_1{}^T & v_2{}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -A^T & 1 \\ 1^T & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0^T & 1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

$Av_1=v_2 1$ (28)　　$1^T v_1=-1$ (29)

ところで、$v_1=-x_B \leqq 0$、$v_2=0$とすれば、(28)、(29)は(30)、(31)となり、Aが歪対称行列なので、(30)、(31)はｐｆｃ成立という条件下では、成立している。

$Ax_B=0$ (30)　　$1^T x_B=1$ (31)

さて、$v_1 \leqq 0$、$v_2=0$なので、(25)において、(32)が成立し、ｄｆｃ成立も証明できた。

$v^T=-\ c_B{}^T B^{-1} \leqq 0$ (32)

5. n= 奇数の基底解アプローチの一般論

4章では、ｎ=３の場合について$a_{i,i+1}>0$の条件下ではLP定式化の最適解において3章の議論にもとづきx1>0、x2>0、x3>0が成立、すなわち、(x1、x2、x3)が基底変数となる点に注目し、(18)、(19)を満足する非負解($x_B \geqq 0$, s=0)が存在すれば、その基底解はpfcを充足し、さらにdfcをも充足することを証明した。なお、この結果は[１]（その４）の性質３とも整合しており、$A^T x=0$あるいは$Ax=0$の非負解が存在すれば、それがMaxLP-1あるいはMaxLP-2の最適解であることを主張する。

それでは、3章の議論は任意のｎについて成立するのであろうか？答えは「No！」であり、ｎ=奇数では成立するが、ｎ=偶数では、必ずしも成立しない(6.4節参照)。

図3にｎ=５の場合についての両プレイヤ間の優越戦略の連鎖を示すが、プレイヤⅠにおいては、x1>0、x2>0、x3>0 、x4>0 、x5>0が要求され、結果として、最適解においてx1～x5の全戦略の採用確率の変数が基底に入ることが要求される。従って、4章での行列表示の議論が一般の奇数ｎの場合にもそのまま成立する。すなわち、[１](その４)4章の一般解(20)式に示すように、$a_{i,i+1}>0$ならば同次方程式$Ax=0$は非負解を持ち、これが最適戦略であると言える。

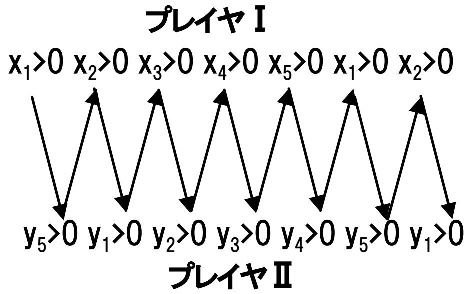

図3：5すくみゲームでの両プレイヤ間での優越戦略の連鎖

６．考察

6.1 LP定式化

本論文では、不等号制約標準型MaxLp-2のpfcとdfcを調べるために、MaxLP-1(3)式を(12)式と置換して議論した。このように置換しても本質的に問題ないのであるが、よりエレガントな直接的証明のためには、等号・不等号混在標準型の基底解のpfcとdfcにもとづくアプローチが必要となる(練習問題)。

6.2 別のLP定式化

MaxLP-1において、(33)の変数置換を行えば、MaxLP-3を得る。　　　　p=x/s (33)

但しpとxは列ベクトル、sはスカラー値である。

[MaxLP-3]

$z^{-1}=1^T p \rightarrow \min$ (34)　$A^T p \geqq 1$ (35)　$p \geqq 0$ (36)

ここで、(34)～(36)のMaxLP-3 は最小化問題であるが、最大化プレイヤ最適戦略定式化なので、Maxと表記した。このMaxLP-3にもとづくLP定式化の方が、MaxLP-1、MaxLP-2よりも簡潔な不等号標準形であるが、本論文で参考対象とする対称ゲームでは最適解でs=0となり、(33)の変数変換が適用できない。

6.3 自己双対LP

6.2節において、MaxLP-1に対する別の定式化MaxLP-3を導入したが、MaxLP-1は[2]で考察した自己双対LPであるが、MaxLP-3は自己双対LPではない点に注意を要する。まず、MaxLP-1が自己双対LPであることを示す。MaxLP-1の双対問題は以下のMinLP-1(37)～(40)で与えられる。

[MinLP-1]

$w=t \rightarrow \min$ (37)　$Ay \leqq t1$ (38)　$1^T y=1$ (39)　$y \geqq 0$ (40)

(37)～(40)において、$w=-z$、$A=-A^T$、$y=x$と置換すると、MinLP-1は以下の式(41)～(44)となる。

[変形MinLP-1]

$-z=t \rightarrow \min$ (41)　　$A^T x \geqq -t1$ (42)

$1^T x=1$ (43)　　　$x \geqq 0$ (44)

変形MinLP-1において、$-t=s$と置換すれば、以下のMaxLP-1(45)～(48)を得る。

$z=s \rightarrow \max$ (45)　　$A^T x \geqq s1$ (46)

$1^T x=1$ (47)　　　$x \geqq 0$ (48)

すなわち、主問題MaxLP-1の双対問題MinLP-1が主問題と等価なので、MaxLP-1は自己双対LPである。従って、4章で注目基底でpfcが成立することが証明された時点で、dfcも成立することが証明されるので、「dfcの証明」部分は再確認と位置づける。

一方、6.2のMaxLP-3については、このLP問題を[2]のDLP((4)～(6))に対応させると、$b=1$、$c=1$であり、$A=-A^T$は成立するが、$b=-c$が成立せず、自己双対LPにはならない。

6.4　偶数nすくみゲーム

それでは、n=偶数の場合には、5章で説明した一般論は成立するのであろうか？実は、成立しない。すなわち同次方程式$Ax=0$の非負解を求める解法は必ずしも妥当ではない。この点については、[3](その6)において説明する。

7. おわりに

ジャンケンポンゲームをn戦略巡回的対称型2人零和行列ゲームと見なし、n=奇数の場合について、ある基底解に注目し、その主実行可能条件（pfc）と双対実行可能条件（dfc）が成立する事を示し、最適戦略を導出した。n=奇数すくみゲームでの両プレイヤ間での優越戦略の連鎖を考察することにより、「全戦略が基底に入る事」を示したが、n=偶数すくみゲームでは「全戦略が基底に入る事」が必ずしも常には成立しない。

シミュレーション等による検証ならびに様々なジャンケンポンゲームの解析等は今後の課題である。

参考文献

[1] 篠原正明, 篠原　健：遊戯ゲームの情報構造と数理分析—（その４）nすくみ巡回ジャンケンポンゲームの提案—, 第43回日本大学生産工学部・学術講演会・数理情報部会（2010.12.4）.

[2] 篠原正明, 篠原　健：対基底の理論と応用（その４）–自己双対LP–, 第44回日本大学生産工学部・学術講演会・数理情報部会（2011.12.3）.

[3] 篠原正明, 篠原　健：遊戯ゲームの情報構造と数理分析—（その６）4すくみジャンケンポンゲームのLP基底解アプローチ—, 第44回日本大学生産工学部・学術講演会・数理情報部会（2011.12.3）.