

単位 4 元数 Bézier 曲線を用いた空間曲線の生成

日大生産工(院) ○小林 勇貴 日大生産工 吉田 典正
東京農工大 齋藤 隆文

1. はじめに

fair な曲線とは, 「曲率プロットが連続で, 少ない数の単調領域を持つ曲線」として定義される²⁾. 自由曲線において, 曲率の制御は容易ではなく, 平面曲線に関して様々な研究が行われている^{1,3,4)}. しかし, 空間曲線において曲率を制御することに関する研究は, あまり多く存在していない.

本研究では, 単位球面上に接線方向を指定し, それを積分することによって空間曲線を生成する手法を提案する. 提案する手法では, 曲線を積分してみないと終点の位置に関する情報が分からない. そこで, 最適化手法を用いて, 指定された端点位置と接線方向を満足するような曲線セグメントの生成手法についても述べる.

2. 従来の研究

2.1 曲率・捩率を考慮した空間曲線生成に関する従来の研究

Bézier 曲線や B-spline 曲線などに代表される自由曲線は, 制御点の位置を設定することにより様々な曲線を生成できるという特徴を持つが, その一方で, 曲率 (および捩率) 変化を制御することは容易ではない. 平面曲線の曲率変化を制御する研究は, 多く行われている^{1,3,4)}.

曲率および捩率を制御するもっともよい方法は, 曲率プロットと捩率プロットをユーザに指定させ, 積分計算をすることによって曲線を生成する手法である. しかしながら, この方法では, 曲線の接線がどのような方向に向いているのかなど, 曲線の形状に関する情報は, 曲線を積分して描いてみないと分からない. class

A Bézier 曲線⁸⁾や対数美的曲線¹⁰⁾は曲率および捩率単調な曲線を生成することができるが, 基本的には一本のセグメントのみの生成である. 三浦によって提案された単位 4 元数積分曲線^{9,10)}は, fair な空間曲線を生成できるが, 生成される曲線の形状や曲率がどのように変化をするのかを推測することは容易ではない. 本研究では, 曲率および捩率の制御と形状に関する推測をある程度可能な手法について述べる.

2.2 単位 4 元数積分曲線

単位 4 元数積分曲線は, Kim らによって提案された Bézier 単位 4 元数曲線^{5,6)}などを用いて, 空間曲線を生成するものであり, 三浦によって提案された. 単位ベクトル

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \in S^2, \text{ Bézier 単位 4 元数曲線}$$

$q(t) (t \in [0, 1])$ が与えられたとき, 単位 4 元数積分曲線は,

$$\hat{\mathbf{C}}(s) = \mathbf{P}_0 + \int_0^s q\left(\frac{u}{s}\right) \hat{\mathbf{v}} q^{-1}\left(\frac{u}{s}\right) du \quad (1)$$

によって与えられる. ここに, $\mathbf{P}_0$ は曲線の始点位置, s は曲線長, $\hat{\mathbf{v}}$ は, $\mathbf{v}$ を 4 元数

$$\hat{\mathbf{v}} = (0, v_x, v_y, v_z) \text{ と解釈したものである.}$$

$q(t)$ は, B-spline 単位 4 元数や Hermite 単位 4 元数でもよい.

3. 接線方向の指定による空間曲線の生成

本研究で提案する曲線は, 球面上の曲線として指定された接線方向を指定し, それを積分することによって空間曲線を得るものである. 球面上の曲線の指定には, 単位 4 元数積分曲線を用いるが, 他の曲線を用いることも可能である.

球面上の曲線を $q(t) (0 \leq t \leq 1)$ としたとき、提案する空間曲線は

$$C(s) = \mathbf{P}_0 + \int_0^s q\left(\frac{u}{s}\right) du \quad (2)$$

によって与えられる。ここに $\mathbf{P}_0$ は始点位置、 s は弧長である。以降式(2)による曲線を**接線積分曲線**と呼ぶ。単位球面上の曲線の指定には必ずしも4元数を用いる必要がないと考えるため、このように呼ぶこととする。この手法によって曲線を生成するメリットは、例えば $q(t)$ が Bézier 単位4元数曲線である場合には、制御点から始点および終点の接線方向を容易に知ることができる点、また生成される曲線の接線方向の変化を推定できる点にある。曲率は接線方向の角速度であり、捩率は従法線の角速度に-1をかけたものである。したがって、単位球面上の曲線が大円上を移動する速度は曲率に相当し、単位球面上の曲線が大円から離れると、捩率が生じる。

4. 曲線セグメントの生成

本節では、両端点の位置と接線方向が指定された場合に、その条件を満足する曲線セグメントを生成する手法について述べる。以降、特に断りのない場合を除いて、 $q(t)$ は2次 Bézier 単位4元数曲線であるとする。 S^2 上の極座標 ϕ, θ の点を $p(\phi, \theta)$

$$p(\theta, \phi) = (\cos \theta \cos \phi, \sin \phi, -\sin \theta \cos \phi) \quad (3)$$

によって表す。曲線セグメントの生成を容易にするために、始点位置は原点とし、始点での接線ベクトルを $[1 \ 0 \ 0]^T$ とする。これは、ユーザによって指定された位置と接線方向に応じて、適切な平行移動と回転を施すことによって、容易にこの条件を満たすことができる。曲線生成後、適切な逆変換を行えば、元の条件をみたすことができる。視点位置が原点であることは、式(2)において $\mathbf{P}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ であることを意味する。ユーザによって指定された始点と終点の位置と接線ベクトルをそれぞれ

$\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_c, \mathbf{V}_a, \mathbf{V}_c$ とする。ここで、 $\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_c, \mathbf{V}_a, \mathbf{V}_c$ は上記の平行移動と回転が施されたものである

とする。すなわち $\mathbf{P}_a = [0 \ 0 \ 0]^T$ である。ここで、始点の接線ベクトルを $\mathbf{V}_a$ 、終点の接線ベクトルを $\mathbf{V}_c$ とすれば、始点と終点における接線方向を満足させることもできる。残りの条件は、 $\mathbf{P}_c$ の一致である。ところで、曲線セグメントをスケール倍しても、始点位置および終点における接線方向を満足することは変わらない。従って生成される曲線の終点は原点と $\mathbf{P}_c$ を通る直線上に存在すればよい。最初と最後の制御点が決めているので、2次 Bézier 単位4元数曲線において、変更できるのは2番目の制御点 $p(\theta_b, \phi_b)$ のみである。したがって、積分した曲線の終点を $\mathbf{P}_c$ としたとき、次式が0になるような θ_b, ϕ_b を求めればよい。

$$f(\theta_b, \phi_b) = \left| \frac{\mathbf{P}_c}{\|\mathbf{P}_c\|} \cdot \mathbf{V}_s - 1 \right| \quad (4)$$

なお、式(4)の最適化には滑降シンプレックス法を用いた。

本手法による最適化では、曲線セグメントが求まらない場合も存在する。また、最適化によって求まる曲線も(特に次数が高くなった場合に)一意とは限らず、初期位置に応じて複数求まるものと思われる。これらに関しては、今後考察を行なっていく予定である。

5. 実行結果

本研究では、単位球面状の曲線から生成される空間曲線について、曲率・捩率をもとに考察をおこなった。

5.1 単位4元数積分曲線

図1(a)は、制御点を大円上に等間隔に置いた2次 Bézier 単位4元数曲線を示す。図1(b)は、これを積分することによって生成された単位4元数積分曲線である。図1(c),(d)は、曲率および捩率プロットを示す。これより、制御点を大円上に等間隔に置いた場合には、曲率・捩率が一定の曲線である常螺旋が生成されることが分かる。図2(a)は、図1(a)の制御点の間隔を等間隔にならないように配置させたものである。図2(b)は、この Bézier 単位4元数曲線を積分した曲線である。図2(c),(d)より、曲率および捩率が線形に変化していることが分かる。これより、単位4元数積分曲線によって、曲率

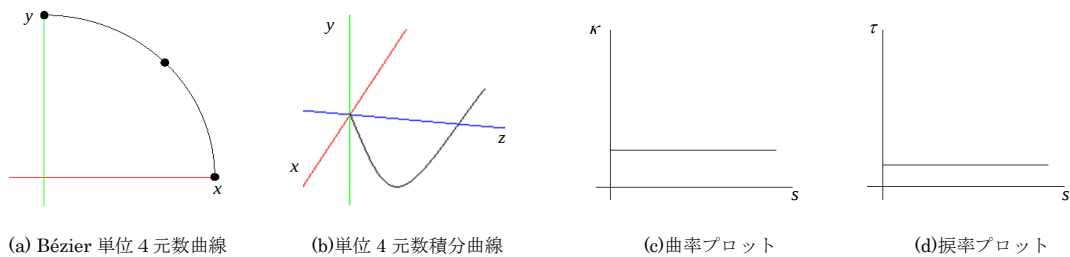


図 1 制御点を等円弧間隔に置いた場合 (単位 4 元数積分曲線)

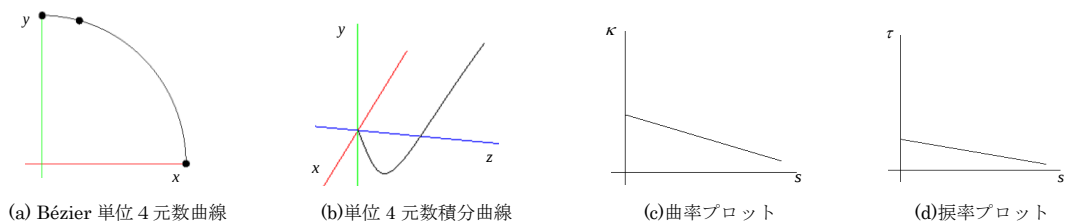


図 2 制御点を等円弧間隔に置かない場合 (単位 4 元数積分曲線)

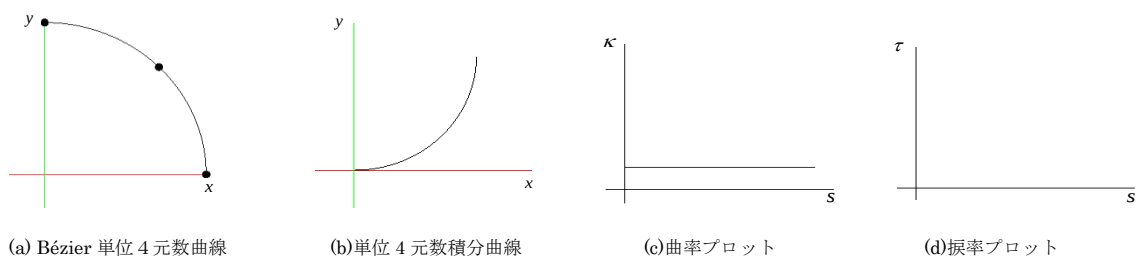


図 3 制御点を等円弧間隔に置いた場合 (接線積分曲線)

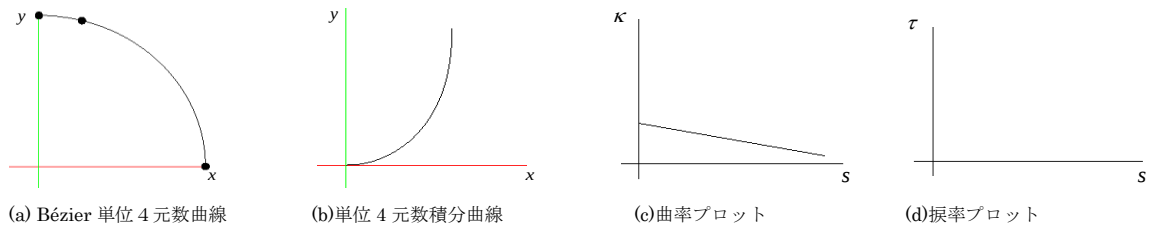


図 4 制御点を等円弧間隔に置かない場合 (接線積分曲線)

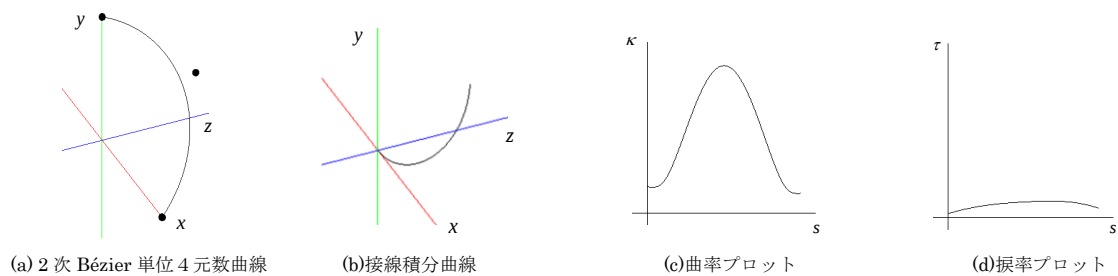


図 5 2 次の空間曲線の場合 (接線積分曲線)

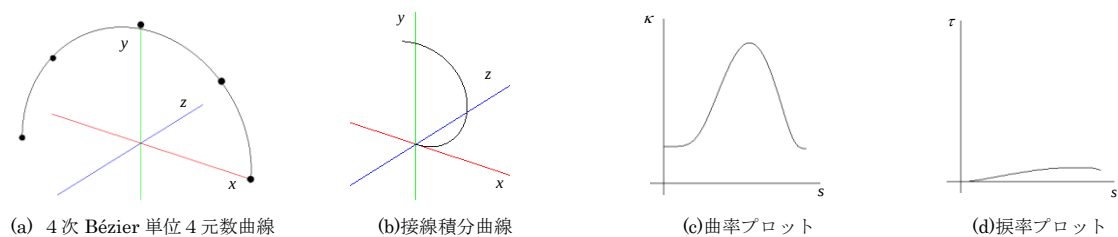


図 6 4 次の空間曲線の場合 (接線積分曲線)

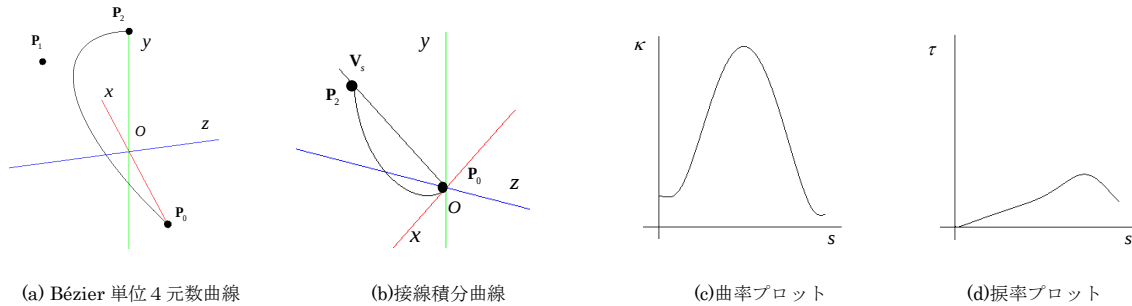


図7 2次の曲線セグメントの生成

および捩率が線形に変化するクロソイド曲線を3次元に拡張したものが得ることができる。

5.2 接線積分曲線

図3(a)は、制御点を大円上に等間隔に置いた2次 Bézier 単位4元数曲線を示す。図3(b)はこれを積分することによって生成された接線積分曲線である。図3(c),(d)は、曲率および捩率プロットを示す。これより、曲率が一定の平面曲線が生成されることが分かる。図4(a)は、図3(a)の制御点の間隔を等間隔にならないように配置させたものである。図4(b)に接線積分曲線、図4(c),(d)に曲率・捩率プロットを示す。これより、曲率が線形に変化する平面曲線を生成されていることが分かる。

図5(a)は、制御点を単位球面上に置いた2次 Bézier 単位4元数曲線の示す。図5(b)は接線積分曲線である。図5(c),(d)に曲率、捩率の変化を示す。

図6(a)は4次 Bézier 単位4元数曲線を示す。これを積分したものが図6(b)である。このように、2次以外の Bézier 単位4元数曲線でも曲線を生成可能である。図6(a),(b)に曲率・捩率プロットを示す。

図7(a)は最適化を行った後の2次 Bézier 単位4元数曲線である。図7(b)に、最適化を行ったことにより、指定された条件を満足する曲線を生成できている様子を示す。図7(c),(d)は図7(b)の曲率・捩率プロットである。

6. まとめ

本研究では、接線方向を積分することによる接線積分曲線を提案した。また、最適化により、ユーザの指定する位置と接線方向を満足する曲線セグメントを求める手法についても述べた。この曲線セグメント生成のアイディアは三浦によって提案された単位4元数積分曲線に容易に応用することも可能である。

単位球面状を曲線が動く速度は曲率に相当するが、この曲線の動きが、曲率および捩率の変化にどのように影響しているのか、さらに研究を進めていく予定である。

参考文献

- 1) N. S. Sapidis, W. H. Frey, Controlling the curvature of quadratic Bézier curve, Computer Aided Geometric Design, Vol. 9, Issue 2, pp.85-91, 1992.
- 2) G. Farin, Curves and Surfaces for CAGD Fifth Edition, Morgan Kaufmann, 2002.
- 3) W. H. Frey, D. A. Field, Designing Bézier conic segments with monotone curvature, Computer Aided Geometric Design, Vol. 17, Issue 6, pp.457-483, 2000.
- 4) Y. Wang, B. Zhao, L. Zhang, J. Xu, K. Wang, S. Wang, Designing fair curves using monotone curvature pieces, Computer Aided Geometric Design, Vol. 21, Issue 5, pp.515-527, 2004.
- 5) Myoung-Jun Kim, Myung-Soo Kim, Sung Yong Shin, A General Construction Scheme for Unit Quaternion Curves with Simple High Order Derivatives, SIGGRAPH, pp.369-376, 1995.
- 6) Myoung-Jun Kim, Myung-Soo Kim and Sung Yong Shin, A Compact Differential Formula for the First Derivative of a Unit Quaternion Curve, The Journal of Visualization and Computer Animation, Vol. 7, Issue 7, pp.43-57, Jan. 1996.
- 7) J. A. Adams, The intrinsic method for curve definition, Computer Aided Design, Vol 7, No.4, pp.243-249, Oct. 1975.
- 8) G Farin, Class A Bézier curves, Computer Aided Geometric Design, Vol. 23, No. 7, pp.573-58, 2006.
- 9) 三浦 憲二郎, 単位4元数積分曲線, 情報処理学会論文誌, vol.38,no.11,pp.2227-2236, 1997.
- 10) N. Yoshida, R. Fukuda, T. Saito, Log-Aesthetic Space Curve Segments, SIAM/ACM Joint Conference on Geometric and Physical Modeling(GDSPM), pp.35-46, 2009.