ISSN 2186-5647

－日本大学生産工学部第44回学術講演会講演概要（2011-12-3）－

4-29

応力法による立体トラスの線形弾性自由振動解析の定式化

日大生産工（院）　○高田　収　日大生産工　川島　晃
（株）中田捷夫研究室　常川　重樹

1.　はじめに

節点系仮想仕事法による応力法は、静定基本系および変形の連続条件による不静定力系の材端応力の総和として求まる[1)]。釣合式の一般解の解法に一般逆行列理論[2)]を用いる応力法の力学的内容は次のようになる。１）特解（非同次方程式の解）は、「系全体の釣合のみを満足する材端応力」を表す。２）余解（同次方程式の解）は『変形の適合条件を満足する材端応力』を表す。物理的には「剛体構造としての材端応力」およびこれを『柔性関係により再配分する（自己釣合の）材端応力』を表す[3)]。したがって、本応力法は構造システムの力学特性を分析する上での優位性がある。特に、形態抵抗構造としての機能を持つ立体トラス構造（ベクトル構造システム）およびテンション構造などのフォルム構造システム[4)]の分析に適している。本報ではこれら構造システムの動特性の分析に向けて、応力モードで表現される線形弾性体の自由振動解析の定式化を述べる。

2.　座標と仮定および記号

図1の $x_{i(i=1,2,3)}$ は全体座標で右手系に設定する。

本報の定式化は等断面直線材で構成されたピン接合立体トラスで、部材はヤング係数Ｅをもつ。

記号は英文字とギリシャ文字を用い，小文字細字はスカラー，小文字太字はベクトル，大文字太字はマトリックスを表わす。肩付添字Ｔはベクトルおよびマトリックスの転置を，肩付添字＋はムーア・ペンローズ一般逆行列を表す。

$A_{(p)}$：部材(p)断面積

(A),(B)：部材の両材端

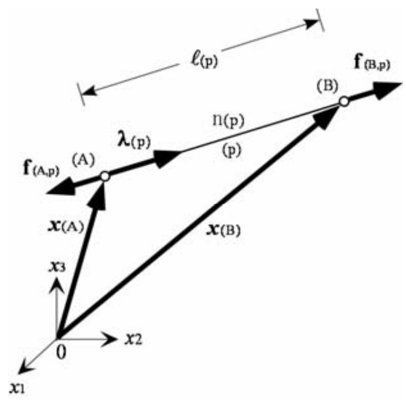

図1　座標系と部材の力学的諸量

$\ell_{(p)}$：部材(p)の材長　$\Delta\ell_{(p)}$：部材(p)の伸縮

m：部材総数　　n：変位の自由度数

$n_{(p)}$：部材(p)の軸力

$\mathbf{f}_{(N,p)(N=A,B)}$：部材(p)の材端力ベクトル

$\mathbf{f}$：節点に作用する荷重ベクトル

$\Delta\boldsymbol{l}$：伸縮ベクトル

$\mathbf{n}$：軸力ベクトル

$\mathbf{u}_{(N,p)(N=A,B)}$：部材(p)の材端変位ベクトル

$\mathbf{u}$：系全体の節点変位ベクトル

$\boldsymbol{x}_{(N)}$：全体座標の原点０に対する位置ベクトル

$\lambda_{(p)}$：部材(p)の方向を示す単位ベクトル

$\mathbf{B}$：材端力と軸力関係を表すマトリックス

$\mathbf{D}$：釣合マトリックス（＝$\mathbf{Q}\,\mathbf{B}$）

$\mathbf{G}$：自己釣合応力マトリックス

$\mathbf{I}_3$：(3×3）の単位行列

$\mathbf{I}_m$：（m×m）の単位行列

$\mathbf{M}$：質量マトリックス（consistent mass matrix）

$\mathbf{Q}$：接続マトリックス

$\mathbf{S}$：柔性マトリックス

Fundamental Formula of Free Vibration Analysis of Space Truss using the stress method

Osamu TAKADA, Shigeki TSUNEKAWA and Akira KAWASHIMA

3. 基本関係式

3.1 力の釣合式　部材 (p) の力学的関係は**図1**を参照する次式で表せる。

$$\begin{bmatrix}\mathbf{f}_{(A,\,p)}\\ \mathbf{f}_{(B,\,p)}\end{bmatrix}=\mathrm{n}_{(p)}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\lambda}_{(p)}\\ \boldsymbol{\lambda}_{(p)}\end{bmatrix} \tag{1}$$

先ず、式(1)は系全体で行列表現する。

一例として、**図2**に示す立体ラーメンの一部について表を用いて説明する。**表1**のように各行には部材 (p) の材端力 $\mathbf{f}_{(A,\,p)}, \mathbf{f}_{(B,\,p)}$ の組を部材番号順、また各列には軸力 $\mathrm{n}_{(p)}$ を部材番号順に並べる。式(1)を見ると部材 (p) の材端 (A) では $\mathrm{n}_{(p)}$ に $-\lambda_{(p)}$ が掛けてあり、材端 (B) では $\lambda_{(p)}$ が掛けられているから**表1**のようになる。出来上がったマトリックスを $\mathbf{B}$ とする。

次に、荷重ベクトル $\mathbf{f}_{(1)}$〜$\mathbf{f}_{(4)}$ と部材 (p) の材端力ベクトル $\mathbf{f}_{(A,\,p)}, \mathbf{f}_{(B,\,p)}$ の作表を説明する。**表2**のように、各行には節点 (K) に作用する荷重ベクトル $\mathbf{f}_{(K)(K\,=\,1,2,\cdots)}$ を節点番号順に、また各列には部材 (p) の材端力 $\mathbf{f}_{(A,\,p)}, \mathbf{f}_{(B,\,p)}$ の組を部材番号順に並べる。**図2**を見ると、節点３には部材(1) (2) の材端 (B) および部材(3) の材端 (A) が接続しているからこれら材端力に対応する場所に (3×3) の単位行列 $\mathbf{I}_3$ を代入する。こうして出来上がったマトリックスを $\mathbf{Q}$ とする。**表2**の各列は**表1**の各行に対応するから、釣合式は式(2)のように記号化できる。

$$\mathbf{f}=\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{n} \tag{2}$$

ここに、

$$\mathbf{f}=[\mathbf{f}_{(1)}, \mathbf{f}_{(2)}\cdots]^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

$$\mathbf{n}=[\mathbf{n}_{(1)}, \mathbf{n}_{(2)}\cdots]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

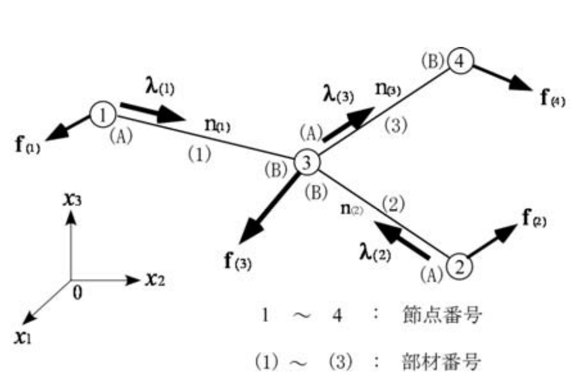

図2 立体トラスの一部

表1 材端力と軸力の関係（二重枠内：マトリックス $\mathbf{B}$）

材端力＼軸力		$\mathrm{n}_{(1)}$	$\mathrm{n}_{(2)}$	$\mathrm{n}_{(3)}$
部材 (1)	$\mathbf{f}_{(1,1)}$	$-\boldsymbol{\lambda}_{(1)}$	0	0
	$\mathbf{f}_{(3,1)}$	$\boldsymbol{\lambda}_{(1)}$	0	0
(2)	$\mathbf{f}_{(2,2)}$	0	$-\boldsymbol{\lambda}_{(2)}$	0
	$\mathbf{f}_{(3,2)}$	0	$\boldsymbol{\lambda}_{(2)}$	0
(3)	$\mathbf{f}_{(3,3)}$	0	0	$-\boldsymbol{\lambda}_{(3)}$
	$\mathbf{f}_{(4,3)}$	0	0	$\boldsymbol{\lambda}_{(3)}$

表2 節点荷重と材端力の関係（二重枠内：マトリックス $\mathbf{Q}$）

材端力＼荷重	部材 (1)		(2)		(3)	
	$\mathbf{f}_{(1,1)}$	$\mathbf{f}_{(3,1)}$	$\mathbf{f}_{(2,2)}$	$\mathbf{f}_{(3,2)}$	$\mathbf{f}_{(3,3)}$	$\mathbf{f}_{(4,3)}$
$\mathbf{f}_{(1)}$	$\mathbf{I}_3$	0	0	0	0	0
$\mathbf{f}_{(2)}$	0	0	$\mathbf{I}_3$	0	0	0
$\mathbf{f}_{(3)}$	0	$\mathbf{I}_3$	0	$\mathbf{I}_3$	$\mathbf{I}_3$	0
$\mathbf{f}_{(4)}$	0	0	0	0	0	$\mathbf{I}_3$

3.2 幾何学的関係式　**図3**は部材 (p) に用いる幾何学的諸量である。材長 $\ell_{(p)}$ と材軸の方向を示す単位ベクトル $\lambda_{(p)}$ および材端の位置ベクトル $\boldsymbol{x}_{(N)(N\,=\,A,\,B)}$ には次の関係がある。

$$\ell_{(p)}\boldsymbol{\lambda}_{(p)}=-\boldsymbol{x}_{(A)}+\boldsymbol{x}_{(B)} \tag{5}$$

ここに、

$$\ell_{(p)}=\{(-\boldsymbol{x}_{(A)}+\boldsymbol{x}_{(B)})^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{x}_{(A)}+\boldsymbol{x}_{(B)})\}^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

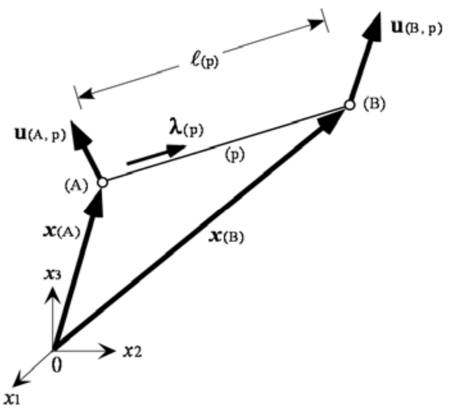

図3 部材の幾何学的諸量

部材 (p) の伸縮 $\Delta\ell_{(p)}$ と材端変位ベクトル $\mathbf{u}_{(A,p)}, \mathbf{u}_{(B,p)}$ （**図3**）の関係は式(7)で表せる。

$$\Delta\ell_{(p)} = \boldsymbol{\lambda}_{(p)}{}^{T}(-\mathbf{u}_{(A,p)} + \mathbf{u}_{(B,p)}) = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\lambda}_{(p)}{}^{T} & \boldsymbol{\lambda}_{(p)}{}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(A,p)} \\ \mathbf{u}_{(B,p)} \end{bmatrix} \tag{7}$$

式(7)を系全体で行列表現する。**図2**に示す立体ラーメンの一部について表を用いて説明する。

表3のように各行には部材(p)の伸縮 $\Delta\ell_{(p)}$ を部材番号順、また各列には材端変位ベクトル $\mathbf{u}_{(A,p)}, \mathbf{u}_{(B,p)}$ の組を節点番号順に並べる。式(7)を見ると部材(p)の材端(A)では $\mathbf{u}_{(A,p)}$ に $-\boldsymbol{\lambda}_{(p)}{}^{T}$ が掛けてあり、材端(B)では $\boldsymbol{\lambda}_{(p)}{}^{T}$ が掛けられているから**表3**のようになる。出来上がったマトリックスは**表1**の逆関係 $\mathbf{B}^{T}$ になる。

次に、トラスが構成されたときには材端変位ベクトル $\mathbf{u}_{(N,p)(N=A,B)}$ は、節点変位の連続性から節点(N)の変位ベクトル $\mathbf{u}_{(N)}$ に等しくなる。この関係を**図2**に適用する。**表4**のように各行には部材(p)の材端変位ベクトル $\mathbf{u}_{(A,p)}, \mathbf{u}_{(B,p)}$ の組を部材番号順に、また各列には節点１～４の変位ベクトル $\mathbf{u}_{(1)}$ ～ $\mathbf{u}_{(4)}$ を並べる。節点３には部材(1)と(2)の材端(B)および部材(3)の材端(A)が接続しているから、$\mathbf{u}_{(3)}$ に対応する場所に（3×3）の単位行列 $\mathbf{I}_3$ を代入する。出来上がったマトリックスは**表2**の逆関係 $\mathbf{Q}^{T}$ となる。**表3**の各列は**表4**の各行に対応するから、幾何学的関係は式(8)のように記号化できる。

$$\Delta\boldsymbol{l} = (\mathbf{QB})^{T}\mathbf{u} \tag{8}$$

ここに、

$$\Delta\boldsymbol{l} = [\Delta\ell_{(1)}, \Delta\ell_{(2)} \cdots]^{T} \tag{9}$$

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_{(1)}, \mathbf{u}_{(2)}, \cdots]^{T} \tag{10}$$

3.３ 構成式

部材(p)の柔性を $S_{(p)}$ とすると構成式は

$$\Delta\ell_{(p)} = S_{(p)} n_{(p)} \tag{11}$$

ここに、

$$S_{(p)} = \frac{\ell_{(p)}}{EA_{(p)}} \tag{12}$$

式(11)を**図2**に適用すると**表5**（式(13)）で表わせる。

表3　幾何学的関係（二重枠内：マトリックス $\mathbf{B}^{T}$）

材端変位 / 伸縮	部材(1)		(2)		(3)	
	$\mathbf{u}_{(1,1)}$	$\mathbf{u}_{(3,1)}$	$\mathbf{u}_{(2,2)}$	$\mathbf{u}_{(3,2)}$	$\mathbf{u}_{(3,3)}$	$\mathbf{u}_{(4,3)}$
$\Delta\ell_{(1)}$	$-\boldsymbol{\lambda}_{(1)}{}^{T}$	$\boldsymbol{\lambda}_{(1)}{}^{T}$	0	0	0	0
$\Delta\ell_{(2)}$	0	0	$-\boldsymbol{\lambda}_{(2)}{}^{T}$	$\boldsymbol{\lambda}_{(2)}{}^{T}$	0	0
$\Delta\ell_{(3)}$	0	0	0	0	$-\boldsymbol{\lambda}_{(3)}{}^{T}$	$\boldsymbol{\lambda}_{(3)}{}^{T}$

表4　節点変位と材端変位の関係（二重枠内：マトリックス $\mathbf{Q}^{T}$）

材端変位 / 節点変位		$\mathbf{u}_{(1)}$	$\mathbf{u}_{(2)}$	$\mathbf{u}_{(3)}$	$\mathbf{u}_{(4)}$
部材(1)	$\mathbf{u}_{(1,1)}$	$\mathbf{I}_3$	0	0	0
	$\mathbf{u}_{(3,1)}$	0	0	$\mathbf{I}_3$	0
(2)	$\mathbf{u}_{(2,2)}$	0	$\mathbf{I}_3$	0	0
	$\mathbf{u}_{(3,2)}$	0	0	$\mathbf{I}_3$	0
(3)	$\mathbf{u}_{(3,3)}$	0	0	$\mathbf{I}_3$	0
	$\mathbf{u}_{(4,3)}$	0	0	0	$\mathbf{I}_3$

表5　伸縮と軸力の関係（二重枠内：マトリックス $\mathbf{S}$）

伸縮 / 軸力	$n_{(1)}$	$n_{(2)}$	$n_{(3)}$
$\Delta\ell_{(1)}$	$S_{(1)}$	0	0
$\Delta\ell_{(2)}$	0	$S_{(2)}$	0
$\Delta\ell_{(3)}$	0	0	$S_{(3)}$

$$\Delta\boldsymbol{l} = \mathbf{Sn} \tag{13}$$

4. 変形の適合条件式

釣合式（式(2)）は次式で表す。

$$\mathbf{f} = \mathbf{Dn} \quad , \quad \mathbf{D} = \mathbf{QB} \tag{14-1, 2}$$

式(14-1)の一般解は $\mathbf{D}$ のムーア・ペンローズ一般逆行列を $\mathbf{D}^{+}$ とすると、

$$\mathbf{n} = \mathbf{D}^{+}\mathbf{f} + (\mathbf{I}_m - \mathbf{D}^{+}\mathbf{D})\boldsymbol{\beta} \tag{15}$$

である。ここに、右辺第１項は特解、右辺第２項は余解（自己釣合応力：$\mathbf{Dn} = \mathbf{0}$ の解）である。$\mathbf{I}_m$ は単マトリックス、$\boldsymbol{\beta}$ は任意ベクトルである。この特解と余解の力学的および物理的意味は「**1. はじめに**」で述べた通りである。

自己釣合系の係数マトリックス$(\mathbf{I}-\mathbf{D}^{+}\mathbf{D})$の独立なr個（不静定次数）の列ベクトルで作るマトリックスを$\mathbf{G}$とする。$\boldsymbol{\beta}$はその任意性より$\boldsymbol{\gamma}$に置き換えると次式が成立する。

$$(\mathbf{I}-\mathbf{D}^{+}\mathbf{D})\boldsymbol{\beta}\equiv\mathbf{G}\boldsymbol{\gamma} \qquad (16\text{-}1)$$

ここに、

$$\mathbf{G}=\left[\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\cdots,\mathbf{g}_r\right] \qquad (16\text{-}2)$$

変形の適合条件は、（補）仮想仕事の原理より次式のようになる。

$$\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{l}=\mathbf{0} \qquad (17)$$

式(17)に構成式(式(13))を代入すると、適合条件式は次式で表せる

$$\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{n}=\mathbf{0} \qquad (18)$$

つぎに、節点変位ベクトル$\mathbf{u}$は幾何学的関係式（式(8)）の特解のみ取り上げる（余解は伸縮ベクトル$\Delta\boldsymbol{l}=\mathbf{0}$の解であるから省略する）。$\mathbf{u}$は式(14-2)と式(13)を用いると

$$\mathbf{u}=(\mathbf{D}^{\mathrm{T}})^{+}\Delta\boldsymbol{l}=(\mathbf{D}^{+})^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{n} \qquad (19)$$

5. 応力法による自由振動解析の定式化

多自由度系の自由振動方程式は、次式で表せる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{D}\mathbf{n}=\mathbf{0} \qquad (20)$$

この連立２階微分方程式の解は振幅マトリックス$\boldsymbol{\Gamma}$、固有振動数ω、時間tとすると

$$\mathbf{u}=\Gamma e^{i\omega t} \qquad (21)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}=-\omega^2\Gamma e^{i\omega t}=-\omega^2\mathbf{u} \qquad (22)$$

式(22)の右辺$\mathbf{u}$に式(19)を代入する。

$$\ddot{\mathbf{u}}=-\omega^2\,(\mathbf{D}^{+})^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{n} \qquad (23)$$

式(23)を式(20)に代入すると、応力法による自由振動方程式は次式で表せる。

$$-\omega^2\mathbf{M}\,(\mathbf{D}^{+})^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{n}+\mathbf{D}\mathbf{n}=\mathbf{0} \qquad (24)$$

ここに、$\mathbf{M}$は（n×n）のマトリックス、$\mathbf{D}$は（n×m）のマトリックス、$\mathbf{S}$は（m×m）のマトリックス、$\mathbf{n}$はm次元ベクトルである。

静定構造(n＝m)では自由振動方程式(式(24))を直接解ける。不静定構造（n＜m）では式(24)は変形の適合条件（式(18)）を付帯条件として解く。この２式を部分マトリックス表示すると式(25)で表せる。

$$\left(\begin{bmatrix}\mathbf{D}\\ \cdots\\ \mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}\mathbf{M}(\mathbf{D}^{+})^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\\ \cdots\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\right)\mathbf{n}=\mathbf{0} \qquad (25)$$

ここに、$\mathbf{G}$（式(16-2)）のランクrは$r=m-n$である。式(25)は次のように記号化する

$$\tilde{\mathbf{G}}_{(m\times m)}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_{(n\times m)}\\ \cdots\cdots\cdots\\ (\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{H})_{(r\times m)}\end{bmatrix}_{(r=m\text{-}n)} \qquad (26\text{-}1)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{(m\times m)}=\begin{bmatrix}\{\mathbf{M}(\mathbf{D}^{+})^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\}_{(n\times m)}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{0}_{(r\times m)}\end{bmatrix}_{(r=m-n)} \qquad (26\text{-}2)$$

上式の下付()内はマトリクスの大きさを表す。式(25)は式(26-1,2)を用いて、

$$(\tilde{\mathbf{G}}-\omega^2\tilde{\mathbf{M}})\mathbf{n}=\mathbf{0} \qquad (27)$$

釣合マトリックス$\mathbf{D}_{(n\times m)}$と適合マトリックス$(\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{H})_{(r\times m)}$で構成される$\tilde{\mathbf{G}}_{(m\times m)}$は非特異（行列式$\left|\tilde{\mathbf{G}}\right|\neq 0$）である。つまり、式(27)は標準固有値問題に変換できる。

$$\mathbf{A}\mathbf{n}=\lambda\mathbf{n} \qquad (28)$$

ここに、$\mathbf{A}=\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\tilde{\mathbf{M}}$　，　$\lambda=\dfrac{1}{\omega^2}$　(29)

$\mathbf{n}$を式(19)に代入し、変位モード$\mathbf{u}$が求まる。

6. まとめ

変形の適合条件を付帯条件として、応力モード$\mathbf{n}$で表現する自由振動解析の定式化を示した。特徴として、慣性力（式(20)の第１項）を応力の一般解（式(15)）の特解項$\mathbf{f}$に置き換えると、柔性関係に依存する感度$\boldsymbol{\beta}$が求まる。

参考文献

1) 齋藤謙次：建築構造力学・下巻、理工図書 1964.9
2) 半谷裕彦、川口健一:形態解析　一般行列の応用，培風館、1991.4
3) 川島　晃:変位法および応力法による立体骨組の構造解析に関する研究、日本大学学位論文、2006.3
4) Heino Engel 著、JSCA 訳：空間デザインと構造フォルム、技法堂出版、1998.8