

応力法による張力構造の自己釣合応力解析

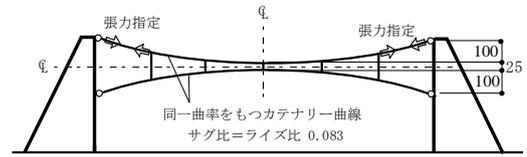
－張力指定型の解法－

日大生産工（院） ○藏持 雅人 日大生産工 川島 晃

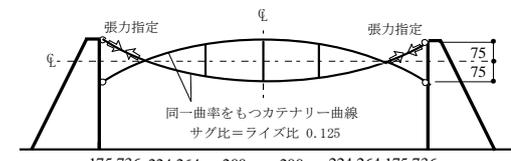
1. はじめに

文献1)では応力法の優位性のひとつである「応力指定問題」として、張力指定によりケーブルネットの釣合形状が自由に変化するタイプの形態解析を示した。

本報告では図1に示す「形態剛な平面張力システム」²⁾の力学モデルを対象として、一部分のケーブル要素にのみ張力を指定して自己釣合系の軸方向力分布（余力系）を求める構造解析に拡張した。また、図2のように押さえケーブルのライズ比を大きくしたときの軸方向力分布の基本的な性質について数値検証した。



(a) サスペンションケーブルが上側にある場合



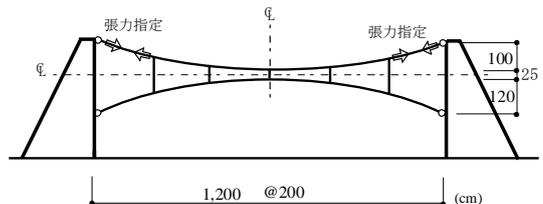
(b) サスペンションケーブルが下側にある場合

図1 張力による自己釣合系の力学モデル

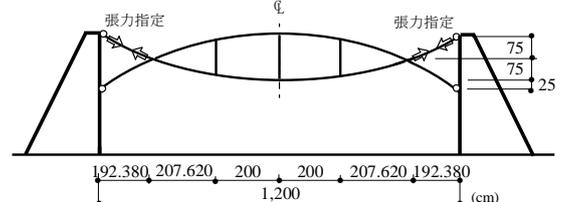
2. 力学モデルの特性

1) 力学モデル（図1）は変位の自由度を拘束するケーブル要素数が不足しているため「剛性を欠く不安定構造」である（図(a)：変位の自由度20、要素数17、図(b)：変位の自由度16、要素数15）。

2) この不安定構造は、張力を導入することで「要素に直交する方向の2次応力（正の剛性：図3）効果」により安定化できる。つまり、張力導入により形態を維持することができる。この力学的安定化問題は「不安定構造の構造問題」と呼ばれ、一般逆行列理論により論理的な考察が行われている⁴⁾。



(a) サグ比0.083 ライズ比0.100



(b) サグ比0.125 ライズ比0.146

図2 数値検証例

3. 自己釣合系の構造解析の概要

3.1 記号

- \bar{m} : 張力を指定するケーブル要素数
- \tilde{m} : 軸方向力を求めるケーブル要素数
- n_d : 変位の自由度
- (i) : 張力を指定するケーブル要素
- (j) : 軸方向力を求めるケーブル要素
- $\bar{n}_{(i)}$: ケーブル要素(i)の張力
- $\tilde{n}_{(j)}$: ケーブル要素(j)の軸方向力

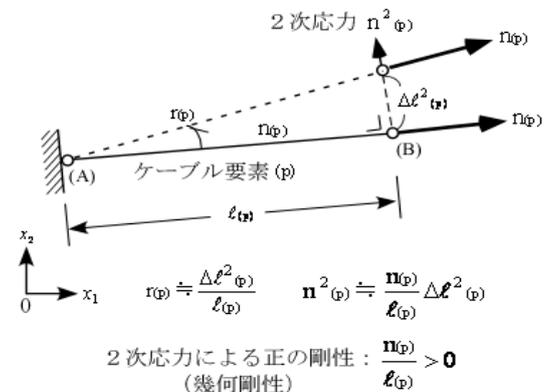


図3 張力による2次応力

3.2 釣合式と一般解

自己釣合系の釣合式は、全要素の軸力ベクトル \mathbf{n} を、釣合行列とすると次式で表せる。

$$\mathbf{B}\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (1)$$

張力を指定するケーブル要素 ($i=1,2,\dots,\bar{m}$) と軸方向力を求めるケーブル要素 ($j=1,2,\dots,\bar{m}$) に関する部分行列で表すと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{(nd \times \bar{m})} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{(nd \times \bar{m})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{n}}_{(\bar{m} \times 1)} \\ \tilde{\mathbf{n}}_{(\bar{m} \times 1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(nd \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(\bar{m} \times 1)} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\text{次式より } \tilde{\mathbf{B}} = -\bar{\mathbf{B}}\mathbf{n} \quad (3)$$

式(2)の一般解は次式で表せる。ムアペンローズの一般行列をとすると

$$\tilde{\mathbf{n}} = -\tilde{\mathbf{B}}^+(\bar{\mathbf{B}}\mathbf{n}) + (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{B}}^+\tilde{\mathbf{B}})\tilde{\boldsymbol{\beta}} \quad (4)$$

ここに、右辺第1項は特解である。第2項は余解である。 \mathbf{I} は $(\bar{m} \times \bar{m})$ の単位行列、 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ は $\bar{m} \times 1$ の任意ベクトルである。 $(nd \times \bar{m})$ の釣合行列 $\tilde{\mathbf{B}}$ の階数

(rank) は $nd > \bar{m}$ の関係にあるから

$$\text{rank } \tilde{\mathbf{B}} = \bar{m} \quad (5)$$

となる。したがって、式(3)右辺第2項の係数行列

$$(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{B}}^+\tilde{\mathbf{B}})$$

$\text{rank}(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{B}}^+\tilde{\mathbf{B}}) = 0$, $(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{B}}^+\tilde{\mathbf{B}}) = \mathbf{0}$ (6-1、2) である。よって、式(3)は特解のみで表せる。

$$\tilde{\mathbf{n}} = -\tilde{\mathbf{B}}^+(\bar{\mathbf{B}}\mathbf{n}) \quad (7)$$

4. 数値検証例

支持点を持つテンションケーブル要素に単位の張力を指定して、自己釣合系の軸方向力分布を解析した。

4.1 ケーブル曲率が同一曲率の場合

図4(a)(b)は、図1(a)(b)における軸方向力分布を示す。同様に、表1(a)(b)は自由節点の不釣合力を示す。2軸対称形からテンションケーブルと押さえケーブルともに等しい軸方向力が得られることを数値検証できた。

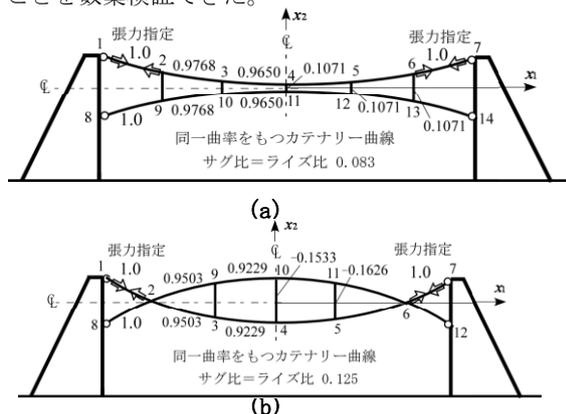


図4 軸方向力分布

表1 自由節点の不釣合力

(a) 図1(a) (b) 図1(b)

節点	座標		座標	
	X_1	X_2	X_1	X_2
2	0.0000001	0.0000000	-0.0000002	0.0000015
3	-0.0000001	0.0000004	-0.0000001	0.0000004
4	0.0000001	0.0000011	0.0000001	0.0000000
5	-0.0000003	0.0000003	0.0000005	-0.0000004
6	0.0000002	0.0000004	0.0000003	0.0000007
9	-0.0000003	-0.0000001	0.0000004	-0.0000003
10	0.0000001	-0.0000004	0.0000006	0.0000000
11	0.0000002	-0.0000011	0.0000006	0.0000003
12	0.0000001	-0.0000003		

4.2 押さえケーブルのライズ比を大きくした場合

図5は、図2(a)(b)における軸方向力分布を示す。図(a)(b)との比較から分かるように押さえケーブルの張力が小さくなることを数値検証できた。

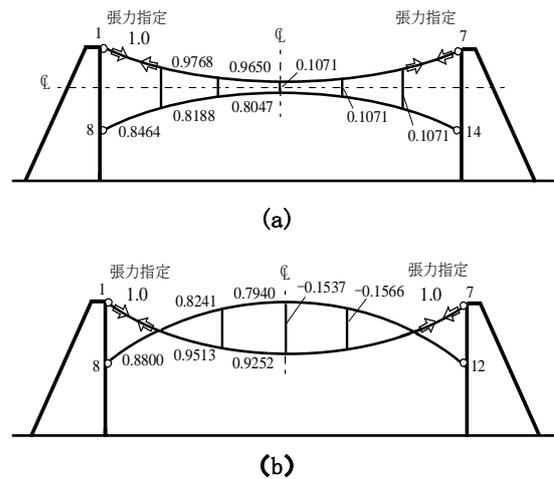


図5 軸方向力分布

5. まとめ

以上、応力法が持つ優位性である応力境界値問題として平面張力システムを取り上げ、自己釣合系の軸方向力分布が得られることを確認した。

参考文献

- 1) 応力法による境界ケーブル方式のケーブルネットの形態解析、第43回日本大学生産工学部学術講演会概要集 pp.127-130, 2010.12.4
- 2) Heino Engel著、JSCA訳：空間デザインと構造フォルム、技報堂出版、1999.8
- 3) 田中尚、半谷裕彦：不安定トラスの剛体変位と安定化条件、日本建築学会構造系論文集、第356号、pp.35-41、1985.10