

# フィルタリングアルゴリズムによる構造損傷同定解析

日大生産工 登坂 宣好

## 1. はじめに

構造物が大型化し、それを構成する部材数も莫大な物となるに従い、構造物の保全や安全を確保する上で損傷部材やその損傷度合を非破壊検査的に明らかにすることが益々必要になってきた。最近では構造物のヘルスマニタリング技術が進展してきたので、この貴重なヘルスマニタリングデータから非破壊的に構造物の損傷を同定できるシステムの提案とその構築が求められている。

そのような状況に対応すべく、構造物のヘルスマニタリングデータから構造物の損傷同定を行うには、ノイズを含んだ計測データを補助情報量とした逆問題の解析という計算力学的アプローチが考えられる。

その際、ノイズを含んだ実測量を対象とするので構造物の力学的挙動に基づく確率ダイナミックシステムを構築し、その逆問題としての同定解析を行うための逆解析法<sup>1)</sup>が構築できれば、それによって同定結果を求めることができる。このような逆解析法として確率ダイナミックスのフィルタリングアルゴリズムによる同定解析システム<sup>2)</sup>を構築してきた。本論文では、同定解析システムによる塔状トラス構造物<sup>3)</sup>およびフレーム構造物<sup>4)</sup>を対象とした構造損傷同定解析を示す。

## 2. フィルタリングアルゴリズム

離散的逆問題の数理モデルは次のシステム方程式と推定方程式によって与えられる。

- ・ システム方程式

$$\mathbf{y} = \mathbf{m}(\mathbf{z}) + \mathbf{v} \quad (1)$$

- ・ 推定方程式

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{b}(\mathbf{y}) \quad (2)$$

ただし  $\mathbf{z}$  は状態ベクトル(未知),  $\mathbf{y}$  は計測ベクトル(既知),  $\mathbf{v}$  はノイズベクトル,  $\mathbf{m}$  はシステム作用素,  $\tilde{\mathbf{z}}$  は推定ベクトル,  $\mathbf{b}$  は推定作用素とする。

ここで式(1)のノイズベクトルを確率変数ベクトルとして取り扱うことにし、式(2)の線形推定を与えることにすると次のような  $\mathbf{z}$  の線形推定ベクトル  $\tilde{\mathbf{z}}$  が与えられる。

$$\tilde{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{z}} + \mathbf{B}\{\mathbf{y} - \mathbf{m}(\bar{\mathbf{z}})\} \quad (3)$$

ただし  $\bar{\mathbf{z}}$  は  $\mathbf{z}$  の期待値ベクトル,  $\mathbf{B}$  は  $\mathbf{b}$  の線形化された推定行列となる。式(3)を用いて  $\mathbf{z}$  の線形推定量を求めるには、フィルタリングアルゴリズムとしての線形推定量に対する次の逐次解法が有効である。

$$\tilde{\mathbf{z}}_{k/k} = \tilde{\mathbf{z}}_{k/k-1} + \mathbf{B}_k \{\mathbf{y}_k - \mathbf{m}(\tilde{\mathbf{z}}_{k/k-1})\} \quad (4)$$
$$(\tilde{\mathbf{z}}_{0/-1} = \bar{\mathbf{z}})$$

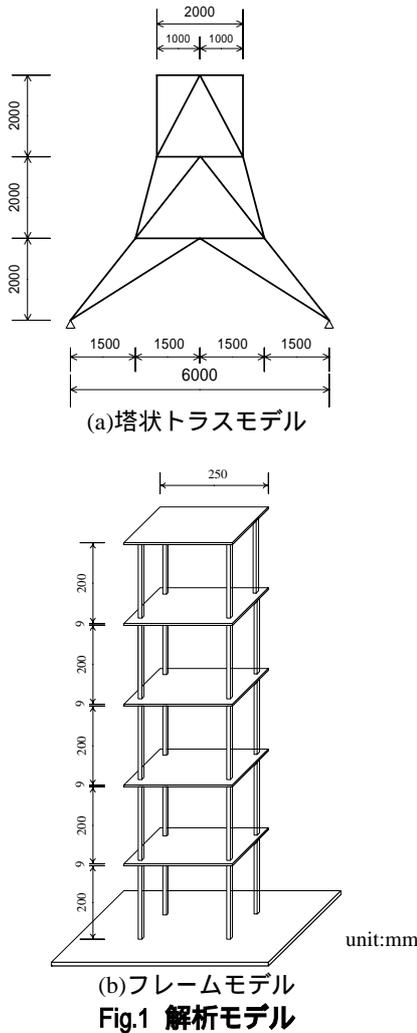
上式の推定行列  $\mathbf{B}_k$  は  $\mathbf{z}$  とその推定量  $\tilde{\mathbf{z}}$  に関する近似度を与える評価基準に対応したフィルタを採用することによって具体的に構成できる。その代表的なものが Wiener フィルタに基づく Kalman フィルタである。その他の例として射影フィルタ族(射影フィルタとパラメトリック射影フィルタ)がある。

### 3. 構造損傷同定解析

軸力による応力伝達機構を有する構造物としてトラス構造を、曲げおよびせん断応力による応力伝達機構を有する構造物としてフレーム構造物を例に構造損傷同定解析を行うに当たり、Wiener フィルタ、射影フィルタおよびパラメトリック射影フィルタに基づくフィルタリングアルゴリズムを逆解析手法とする逆問題を構成する。

#### 3.1 構造モデル

損傷同定解析の対象とする塔状トラスモデルを Fig.1(a)に、またフレームモデルを Fig.1(b)に示す。本研究では損傷を剛性の低下として定義することにより、塔状トラスモデルでは1部材が損傷により剛性低下するものとし、フレームモデルでは損傷によりいずれかの一層が剛性低下するものとした。



#### 3.2 逆問題の構成

逆問題解析では損傷に伴う固有振動数の変化のみに基づき剛性低下と損傷層（部材）を同定するものとする。逆解析手法としてのフィルタリングアルゴリズムの計算過程で求められる固有振動数は、いずれのモデルも次式で表される非減衰の固有振動方程式を用いるものとする。

$$|-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}| = 0 \quad (5)$$

ここに  $\omega$  は固有振動数、 $\mathbf{M}$  は質量行列、 $\mathbf{K}$  は剛性行列である

システムの状態量である剛性と計測データである固有振動数の関係は非線形であるため、システム作用素は非線形ベクトル関数として式(1)で与えられる。式(1)は非線形関数が滑らかであるという仮定において、状態量  $\mathbf{z}$  の周りで線形化し、高次項を無視すると感度行列  $\mathbf{M}_k$  を伴った擬似線形化された離散的システム方程式を得る。

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{m}(\tilde{\mathbf{z}}_k) + \mathbf{v}_k$$

$$\mathbf{M}_k \tilde{\mathbf{z}}_k + \mathbf{v}_k \quad (6)$$

ここに、

$$\mathbf{M}_k = \left( \frac{\partial \mathbf{m}(\tilde{\mathbf{z}}_k)}{\partial \mathbf{z}_k} \right) \quad (7)$$

システム方程式(6)に対し、式(4)を用いて逐次解法であるフィルタリング計算を行うことにより状態量としての剛性を同定することができる。

推定行列  $\mathbf{B}_k$  の具体的表現は Wiener フィルタに基づく Kalman フィルタ、射影フィルタおよびパラメトリック射影フィルタに対して、それぞれ次のように与えられる。

- Wiener フィルタ

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{R}_{k/k-1} \mathbf{M}_k^T (\mathbf{M}_k \mathbf{R}_{k/k-1} \mathbf{M}_k^T + \mathbf{Q}_k)^{-1} \quad (8)$$

ここに，推定誤差共分散行列  $\mathbf{R}_k$  は次式で与えられる．

$$\mathbf{R}_{k/k} = \mathbf{R}_{k/k-1} - \mathbf{B}_k \mathbf{M}_k \mathbf{R}_{k/k-1} \quad (9)$$

・ 射影フィルタ

$$\mathbf{B}_k = (\mathbf{M}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{M}_k)^{-1} \mathbf{M}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} \quad (10)$$

・ パラメトリック射影フィルタ

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{M}_k^T (\mathbf{M}_k \mathbf{M}_k^T + \gamma \mathbf{Q}_k) \quad (11)$$

射影フィルタおよびパラメトリック射影フィルタの推定誤差共分散  $\mathbf{R}_k$  は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{k/k} = & \mathbf{R}_{k/k-1} - \mathbf{B}_k (\mathbf{M}_k \mathbf{R}_{k/k-1} \mathbf{M}_k^T + \mathbf{Q}_k) \mathbf{B}_k^T \\ & - \mathbf{B}_k \mathbf{M}_k \mathbf{R}_{k/k-1} - \mathbf{R}_{k/k-1} \mathbf{M}_k^T \mathbf{B}_k^T \end{aligned} \quad (12)$$

ここに  $\mathbf{Q}_k$  は観測雑音誤差共分散であり，一般に計測誤差を採取する際に得ることができる．具体的には計測データより標準偏差を求め，2乗した分散値を対角成分として与えることになる．また，射影フィルタおよびパラメトリック射影フィルタには直接推定誤差共分散行列が含まれていない点に特徴を有する．

本損傷同定解析では  $\tilde{\mathbf{z}}_k$  をフィルタリング  $k$  ステップの剛性とする，フィルタリング方程式(4)における  $\mathbf{m}(\mathbf{z}_{k/k-1})$  は  $k-1$  ステップの情報量をもとにした  $k$  ステップの剛性に基づく固有振動数を意味することになり，固有振動方程式(5)を用いて計算される．これらの計算は  $\mathbf{y}_k$  と  $\mathbf{m}(\tilde{\mathbf{z}}_{k/k-1})$  が一致するまで繰り返されることにより損傷同定が可能となる．

本解析手法では，フィルタ方程式を繰り返し計算アルゴリズムとして用いるが，各フィルタリングステップにおいてノイズベクトル  $\mathbf{v}$  を考慮せず，同じ観測値を用いることができる<sup>2)</sup>．

### 3.3 損傷位置の同定

本解析手法では計測データとして固有振

動数のみを採用しているため，損傷位置に関する情報を直接導入していない．そこで損傷位置の同定は，フィルタリング計算で得られる情報に基づき次式により計算した．

$$V_n = \sum_{i=1}^l (\omega_i - m(z_k^n)_i)^2 \quad (13)$$

ここに， $V_n$  はフィルタリング計算で更新された固有振動数の第  $n$  層（部材）における偏差平方和であり， $\omega_i$  は  $i$  次モードの固有振動数， $z_k^n$  はフィルタリング  $k$  ステップにおける第  $n$  層（部材）の状態量である．また  $l$  は固有振動数の総数である．

第  $n$  層（部材）に関する損傷の可能性を意味する評価値を次式で表す．

$$J_n = \frac{1}{V_n} \left/ \sum_{l=1}^m \frac{1}{V_l} \right. \quad (14)$$

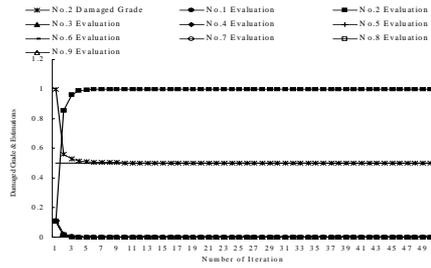
状態量が収束した時点で，評価値  $J_n$  が最も大きな値を示す層（部材）が損傷位置として同定される．

## 4. 同定解析結果

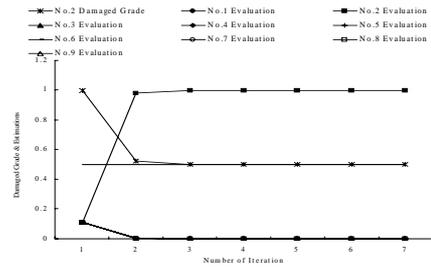
前章で述べたフィルタリングアルゴリズムによる同定解析システムによる塔状トラス構造とフレーム構造の構造損傷同定解析結果を示す．なお，フレーム構造に関しては，実験モード解析に基づくヘルスマニタリングより得られた計測データ，観測誤差およびシステムの状態誤差としての推定誤差を用いた逆解析を行った．

Fig.2~3 にそれぞれのフィルタにおける塔状トラス構造およびフレーム構造の1層（部材）が50%剛性低下した場合の損傷同定解析結果の例を示す．横軸はフィルタリング回数，縦軸は状態量と評価値の無次元量である．

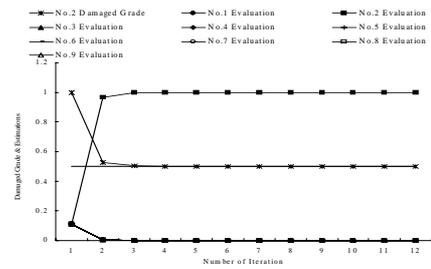
いずれのフィルタを用いた結果も損傷層および損傷位置を精度良く同定していることがわかる．特にパラメトリック射影フィルタは，正規化パラメータとしての  $\gamma$  がフィルタリング計算の安定性に寄与していることが確認された．



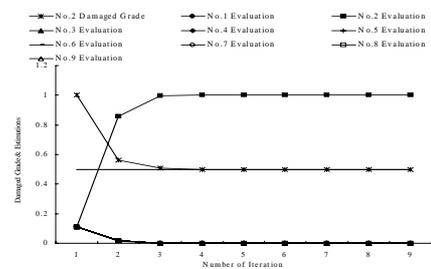
(1) Kalman フィルタ



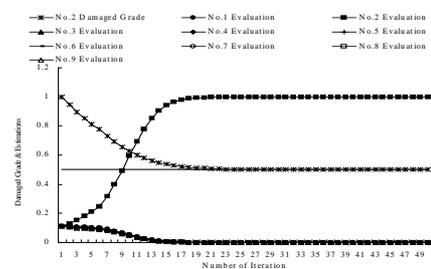
(2)射影フィルタ



(3)パラメトリック射影フィルタ( $\gamma = 0.1$ )

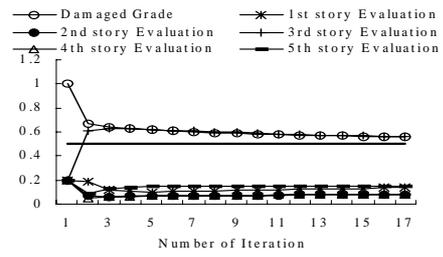


パラメトリック射影フィルタ( $\gamma = 1.0$ )

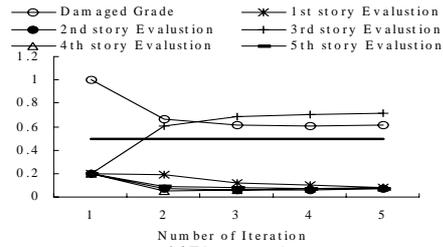


パラメトリック射影フィルタ( $\gamma = 100$ )

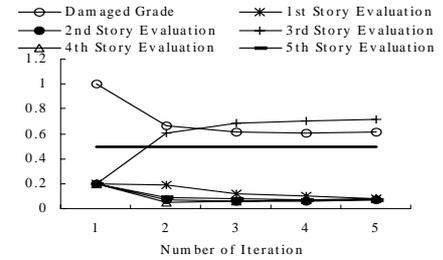
Fig.2 トラスモデルの損傷同定解析結果(部材 )



(1)Kalman フィルタ



(2)射影フィルタ



(3)パラメトリック射影フィルタ( $\gamma = 1.0$ )

Fig.3 フレームモデルの損傷同定結果(第3層)

## 5. おわりに

構造物の保全や安全を確保する上で必要となる非破壊検査的なアプローチとして、計算力学からの損傷同定解析システムを示した。その適応性を、トラス構造やフレーム構造に対して計測された固有振動数のみを用いた損傷同定解析結果を通して検証した。今後は限定されたヘルスマニタリングデータの利用や多くの部材数を有する構造物への適応性を検討していきたい。

## 参考文献

- 1) 登坂宣好, 大西和榮, 山本昌弘, 逆問題の数理と解法, 東京大学出版会, (1999)
- 2) 村上章, 登坂宣好, 堀宗朗, 鈴木誠, 有限要素法・境界要素法による逆問題解析, コロナ社, (2002)
- 3) 登坂宣好, 遠藤龍司, 武藤俊広, フィルタ理論を用いた塔状トラスの構造損傷解析, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.7, pp155-165, (2004)
- 4) R. Endo, N. Tosaka, Structural Damage Analysis of a Frame Structure Models using Filtering Algorithms, 7<sup>th</sup> Civil-comp., Paper241, (2004)