

日大生産工 ○ 間田 潤

図 2: 玉の移動規則

もちろん，配置を一万回変化させれば求めるべき配置は得られるが，面倒である．そこで，先ほどの性質 (a), (b) を用いたところだが，複雑な初期配置に対しては性質 (c) を考慮しなくてはならないため簡単にはいかない．

このように簡単そうに見えて簡単でないところが，箱玉系の面白さである．ちなみに，この問題の解答は次のような形で与えることができる（この結果は私の研究成果の一つである²⁾）．

【解答の概要】

u_n^t を『初期配置から t 回変化させて得られる配置の n 番目の箱に入っている玉の数』とすると，初期配置 (u_n^0) から得られる情報 a_i ($\doteq i$ 番目の玉の塊の位置) と P_i ($\doteq i$ 番目の玉の塊の長さ) から，

$$u_n^t = \rho_n^{t+1} - \rho_n^t - \rho_{n+1}^{t+1} + \rho_{n+1}^t,$$

$$\rho_n^t = \max_{J \subseteq \{1, 2, \dots, N\}} \left[\sum_{i \in J} (\theta_i + tP_i - n) - 2 \sum_{\substack{i, j \in J \\ i < j}} \min [P_i, P_j] \right],$$

$$\theta_i = a_i + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \min [P_i, P_j]$$

の式を用いて u_n^t が求まる．

3．箱玉系の拡張

玉の種類を増やしたり，箱の容量を変えたりと箱玉系には幾つかの拡張が存在する．その中の一つに私が主に研究対象としている‘周期箱玉系’と呼ばれるものがある³⁾．具体的には，図 4 のように，箱の数を有限個にして，両端の箱をつないだものである（簡単に言ってしまうと，周期境界条件を課したものである）．

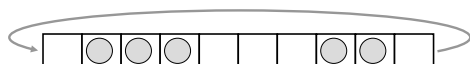


図 4: 周期箱玉系

周期箱玉系においては，箱玉系と異なる性質が出てくる．例えば，

- (i) 一度通り過ぎた玉の塊が再び現れ，何度も衝突を繰り返す（図 5）．

- (ii) 箱と玉の数を決めれば，考えられる玉の配置は有限個になる．さらに，玉の移動規則が可逆であるので，玉の配置の変化は周期的になる（玉の配置を変化させていくと，どこかで必ず同じ玉の配置が現れ，その後の玉の配置の変化は前と同じになる）．

などが挙げられる．性質 (i) により，先ほどの初期値問題はさらに複雑になる．また，性質 (ii) により，同じ配置が初めて現れるまでの配置の変化数（基本周期）を求めるという新たな課題が生じる．これについての解答も既に出ているが，紙面および講演時間の制約があるので，詳細はまたの機会とする．

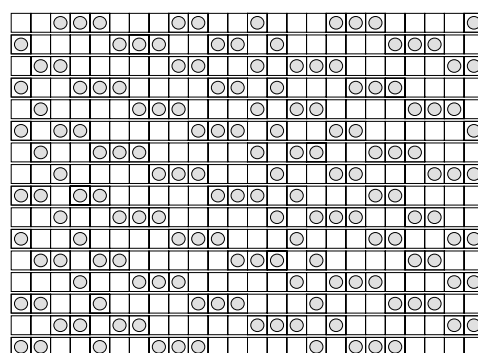


図 5: 玉の配置の変化（周期箱玉系）

「参考文献」

- 1) D. Takahashi and J. Satsuma, “A soliton cellular automaton”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **59** (1990), 3514–3519.
- 2) J. Mada, M. Idzumi and T. Tokihiro, “The box-ball system and the N -soliton solution of the ultradiscrete KdV equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008), 175207.
- 3) D. Yoshihara, F. Yura and T. Tokihiro, “Fundamental cycle of a periodic box-ball system”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 99–121.

【練習問題の解答】

