

代数的場の量子論における因果概念

日大生産工 ○北島雄一郎

1 はじめに

代数的場の量子論において、空間的に離れた時空領域における観測命題が独立であるということの数学的表現は統計的独立性 (statistical independence) とよばれていて、いくつかの条件が提案されている⁵⁾。本発表では、空間的に離れた時空領域における観測命題の間の因果関係をどのように定式化するべきかという問題と、この定式化と統計的独立性はどのような関係にあるのかという問題を考える。

因果とは何かという問題に関して様々な見解があるが、本稿ではウッドワードによる介入に基づいた因果の観点から、上で述べた問題を考えていく⁷⁾。ウッドワードによれば、CがEの原因であるということは、Cを適切に操作すればEが変化することである。例えば、Cを「鉄を熱する」ということ、Eを「鉄が白熱する」ということとする。このとき、「CがEの原因である」ということは、「物を熱する一般的な技術を鉄に適用することによって、鉄は白熱するだろう」ということである。ここで、「物を熱する一般的な技術を適用する」ことが介入にあたる。

本発表では、この立場から、代数的場の量子論における因果の問題を考える。特に、空間的に離れた時空領域における観測命題の間に因果関係がないということの必要条件を定義し (定義2)、代数的場の量子論においてその条件が成立することを示す (定理1)。さらに、その条件と統計的独立性との関係を明らかにする (定理2)。

2 代数的場の量子論における介入

代数的場の量子論では、ミンコフスキー空間の有界な開集合 O にヒルベルト空間 H 上のフォン・ノイマン代数 $N(O)$ を対応させる。このフォン・ノイマン代数は局所代数とよばれる。 N は局所代数全体が生成するフォン・ノイマン代数、 $S(N)$ を N 上の正規状態全体の集合とする。

$N(O)$ に含まれる射影作用素は「 O において物理量 A を観測したら、その値は a である」という観測命題と解釈される。ある状態のもとで観測命題が真である確率は、 N 上の正規状態を用いて計算できる。

本発表では、局所代数は次の二つの公理をみたすものとする。

公理 1

ミンコフスキー空間の有界な開集合 O_1 と O_2 は空間的に離れているとする。このとき、任意の作用素 $A_1 \in N(O_1)$ と $A_2 \in N(O_2)$ に対して、 $A_1 A_2 = A_2 A_1$ となる。

公理 1は通常の代数的場の量子論において仮定される公理である¹⁾²⁾³⁾。

公理 2

ミンコフスキー空間の有界な開集合 O の閉包は有界な開集合 O_0 に含まれているとする。 O でない任意の射影作用素 $P \in N(O)$ に対して、部分等長作用素 $V \in N(O_0)$ が存在して、 $VV^* = P$, $V^*V = I$ となる。ただし、 I は恒等作用素である。

公理2は、いくつかの公理から導かれる性質であるが²⁾、代数的場の量子論のセクター理論では、この性質を公理とすることもある¹⁾³⁾。そこで、本発表でもこれを公理とする。

ウッドワードによれば、事象を特定する変数 X が他の変数 Y の原因であるということは、 X への介入の候補が存在し、その介入によって X の値が変化したならば Y の値も変化するということである⁷⁾。本発表では、この定式化における X や Y として観測命題、 X や Y の値として観測命題の確率を考える。したがって、「有界な時空領域 O において物理量 A の値が a である」という観測命題の確率を変化させることを、この観測命題への介入とみなすことにする。つまり、介入によって変化するの観測命題の確率である。上で述べたように、観測命題の確率は N 上の正規状態で与えられるので、観測命題の確率を変化させるということは状態を変化させるということである。そこで、本発表では非選択的な操作とよばれる状態変化の数学的定式化を介入と考える。

定義 1

N から N への写像 T は、作用素 $K_i \in N$ が存在して、任意の $A \in N$ に対して、

$$T(A) = \sum_i K_i^* A K_i \quad \sum_i K_i^* K_i = I$$

となるとき、 N 上の非選択的な操作とよぶ。

$S(N)$ から $S(N)$ への写像 T^* は、 N 上の非選択的な操作 T が存在して、任意の $A \in N$ と $\rho \in S(N)$ に対して、

$$(T^* \rho)(A) = \rho(T(A))$$

となるとき、 $S(N)$ 上の操作とよぶ⁴⁶⁾。

$N(O_1)$ と $N(O_2)$ の間にウッドワードの意味で因果関係がないならば、 $N(O_1)$ に属する任意の射影作用素に対して、その観測命題の確率を変化させても $N(O_2)$ に属する射影作用素の確率は変化しないような介入が存在しなければならない。そこで、次のような定義を考える。

定義 2

O_1 と O_2 をミンコフスキー空間の有界な開集合とする。 $0 < P < I$ であるような任意の射影作用素 $P \in N(O_1)$ と任意の $0 \leq \lambda \leq 1$ なる実数 λ に対して、 $S(N)$ の非選択的な操作 T^* が存在して、任意の $\rho \in S(N)$ に対して、

$$(T^* \rho)(P) = \lambda$$

かつ

$$(T^* \rho)|_{N(O_2)} = \rho|_{N(O_2)}$$

となるとき、 $N(O_1)$ と $N(O_2)$ は介入因果独立の必要条件をみたすという。

定理 1

O_1 と O_2 を厳密に空間的に離れているミンコフスキー空間の有界な開集合とする。このとき、 $N(O_1)$ と $N(O_2)$ は介入因果独立の必要条件をみたす。

次に、介入因果独立の必要条件をみたすということと統計的独立性の関係を考える。統計的独立性にはいくつかの種類があり、 C^* 独立性はその一つである⁵⁾。

定義 3

A_1 と A_2 を C^* 代数 A の部分 C^* 代数とする。任意の A_1 上の状態 ρ_1 と A_2 上の状態 ρ_2 に対して、 A 上の状態 ρ が存在して、 $\rho|_{A_1} = \rho_1$ かつ $\rho|_{A_2} = \rho_2$ となるとき、 A_1 と A_2 は C^* 独立であるという。

定理 2

O_1 と O_2 をミンコフスキー空間の有界な開集合とする。 $N(O_1)$ と $N(O_2)$ が介入因果独立の必要条件をみたすならば、 $N(O_1)$ と $N(O_2)$ は C^* 独立である。

3. まとめ

本発表では、ウッドワードによる因果の立場から代数的場の量子論における因果を考察してきた。特に、厳密に空間的に離れた時空領域 O_1 と O_2 における観測命題の間の因果関係を考えた。

2節で述べたように、このとき介入は、人間と無関係に、そしてこれらの観測命題の間に因果関係があるかどうかということと無関係に定式化することが必要である。本発表では、代数的場の量子論においてそのような条件を満たす介入の候補として、 $S(N)$ の非選択的な操作に注目した。

厳密に空間的に離れた時空領域 O_1 と O_2 における観測命題の間に因果関係がないならば、 O_1 における任意の観測命題に対して、その観測命題の確率を変化させても O_2 における観測命題の確率が変化しないような介入が存在しなければならない。定義 2 において、 $S(N)$ の操作を用いてそのような介入を定義し、定理 1 においてそれが存在することを示した。

また、定義 2 で定義した介入因果独立の必要条件をみたすという条件は、 C^* 独立性よりも強い条件である(定理 2)。つまり、こうした統計的独立性の条件がみたされていても、介入因果独立の必要条件をみたすということは導かれない。したがって、 C^* 独立性は、空間的に離れた二つの時空領域における観測命題の間にウッドワードの意味で因果関係がないということの必要条件と解釈されるべき条件である。

「参考文献」

- 1) 荒木不二洋『量子場の数理』岩波書店(1996)
- 2) Baumgartel, H. Operatoralgebraic Methods in a Quantum Field Theory, Akademie Verlag (1995).
- 3) Halvorson, H. 'Algebraic Quantum Field Theory' in eds. J. Butterfield and J. Earman, Handbook of Philosophy of Physics, pp.731–922, Elsevier (2007).
- 4) Kraus, K. States, Effects, and Operations, Springer (1983).
- 5) Summers, S. J. 'On the Independence of Local Algebras in Quantum Field Theory', Reviews in Mathematical Physics, 2, (1990) pp. 201–207.
- 6) Werner, R. 'Local Preparability of States and the Split Property in Quantum Field Theory', Letters in Mathematical Physics, 13, (1987) pp. 325–329.
- 7) Woodward, J. Making Things Happen, Oxford University Press (2003).