

Multi-Stage Bradley-Terry Model によるバイナリ AHP

日大生産工 ○西澤一友 筑波大 高橋磐郎

1 はじめに

Analytic Hierarchy Process(AHP) では一対比較行列より主固有値とそれに対応する主固有ベクトルを求めて評価するのが一般的解法である。一方、最小二乗推定を基にした解法では、得られている一対比較の情報のみで評価ウエイトを決定するので、完全情報・不完全情報の区別、一対比較値の逆数対称性の制約がない、誤差解析 [7, 9, 12] ができる等の利点がある [5]。先行研究として、バイナリ AHP およびターナリ AHP [8] を対象とした解法として、Bradley-Terry Model [1] による minimax 法 (MM) と最小二乗法 (LS) を提案し、MM と LS の結果は等しいことを示した [4]。さらに重み付き最小二乗法 (WLS) による解法を提案し、得られる解は常に正であることを証明した [5]。WLS は MM や LS より優れていることが示され、良い結果が得られることが期待された。しかし、WLS そのままの適用では推定誤差の分散が一定にならないため推定法としては不十分であった。

そこで本研究では、WLS の推定誤差の分散が一定になるように変数変換を行った。変換された問題は幾何計画問題 [2, 6] となり、Gradient 法 [11] で解けるようになった。さらに Bradley-Terry Model を各一対比較に重要度を導入する Multi-Stage Bradley-Terry Model に拡張した。Multi-Stage Bradley-Terry Model によるバイナリ AHP は同様に幾何計画問題として解けることを適用例で示す。

2 Bradley-Terry Model によるバイナリ AHP

代替案 i と j の対 (i, j) を一対比較した集合を E としたとき、 i が j より優れている (“ $i \succ j$ ”) の

みで判定するときバイナリ AHP という。Bradley-Terry Model では、代替案 i の真のウエイトを $u_i (> 0)$ ($i = 1, \dots, n$) とすると “ $i \succ j$ ” となる確率 p_{ij} を以下のように定義する。

$$p_{ij} = u_i / (u_i + u_j) \quad (1)$$

もちろん、 $p_{ij} + p_{ji} = 1$ である。

代替案 i と代替案 j で行われた一対比較の回数を $r_{ij} (\geq 0)$ 、“ $i \succ j$ ”の数を x_{ij} し、 $\hat{x}_{ij} (= x_{ij} / r_{ij})$ を p_{ij} の近似値とみなす。 r_{ij} が小さい値の時、極端な判定を防ぐため、ここでは緩和パラメータ $\theta (0 < \theta < 1/2)$ を導入し、以下の近似式を考える。

$$\hat{x}_{ij}(1 - \theta^{r_{ij}}) \doteq u_i / (u_i + u_j) \text{ for } \hat{x}_{ij} > 1/2 \quad (2)$$

左辺を簡略して以下のように表現する。

$$\hat{x}_{ij}(\theta) \doteq u_i / (u_i + u_j) \quad (3)$$

近似の誤差 e_{ij} は以下になる。

$$e_{ij} = (\hat{x}_{ij}(\theta) - 1)u_i + \hat{x}_{ij}(\theta)u_j, \quad (i, j) \in E \quad (4)$$

この行列表現は以下になる。

$$\mathbf{e} = \mathbf{X}\mathbf{u} \quad (5)$$

x_{ij} が確率 p_{ij} 、試行回数 r_{ij} の二項分布に従うとすると、

$$E[\hat{x}_{ij}] = p_{ij} = u_i / (u_i + u_j), \quad (6)$$

$$V[\hat{x}_{ij}] = p_{ij}(1 - p_{ij}) / r_{ij} = \frac{u_i u_j}{r_{ij}(u_i + u_j)^2} \quad (7)$$

となり、

$$E[\hat{x}_{ij}(\theta)] \doteq u_i / (u_i + u_j), \quad (8)$$

$$V[\hat{x}_{ij}(\theta)] \doteq \frac{u_i u_j}{r_{ij}(u_i + u_j)^2} \quad (9)$$

が得られ、期待値、分散は以下のように求まる。

The Multi-Stage Bradley-Terry Model in the binary AHP

Kazutomo NISHIZAWA and Iwaro TAKAHASHI

$$E[e_{ij}] = (\frac{u_i}{u_i + u_j} - 1)u_i + \frac{u_i}{u_i + u_j}u_j = 0 \quad (10)$$

$$V[e_{ij}] = \frac{u_i u_j}{r_{ij}} \quad (11)$$

残念ながら、誤差の分散 $V[e_{ij}]$ は定数ではない。

そこで以下のような変数変換により推定誤差の分散 $V[\varepsilon_{ij}]$ を一定になるようにする。

$$v_\nu = v_{ij} = (\frac{u_i u_j}{r_{ij}})^{-1} = \frac{r_{ij}}{u_i u_j}, \quad (12)$$

$$\Lambda = \text{diag}[v_1, \dots, v_r], \quad \sqrt{\Lambda} = \text{diag}[\sqrt{v_1}, \dots, \sqrt{v_r}], \quad (13)$$

$$\varepsilon = \sqrt{\Lambda} X u, \quad (14)$$

$$V[\varepsilon_{ij}] = 1, \quad (i, j) \in E \quad (15)$$

ここで変数変換された誤差 ε_{ij} は以下になる。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sqrt{r_{ij}}}{\sqrt{u_i u_j}} e_{ij} = \bar{y}_{ij} \sqrt{\frac{u_i}{u_j}} + y_{ij} \sqrt{\frac{u_j}{u_i}} \quad (16)$$

ただし、

$$\bar{y}_{ij} = \sqrt{r_{ij}}(\dot{x}_{ij}(\theta) - 1), \quad y_{ij} = \sqrt{r_{ij}}\dot{x}_{ij}(\theta) \quad (17)$$

であり、以下になる。

$$\varepsilon_{ij}^2 = \bar{y}_{ij}^2 \frac{u_i}{u_j} + y_{ij}^2 \frac{u_j}{u_i} + 2y_{ij}\bar{y}_{ij} \quad (18)$$

ここで、

$$a_{ij} = y_{ij}^2, \quad a_{ji} = \bar{y}_{ij}^2 \quad (a_{ii} = 0), \quad (19)$$

$$d^T u = u_1 + \dots + u_n = 1 \quad (20)$$

とすると、誤差の二乗和を最小にするように u_i ($i = 1, \dots, n$) を決定する問題は以下になる。

$$\begin{aligned} \min f(u) &= f(u_1, \dots, u_n) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{u_j}{u_i} \quad (\text{in } u > 0) \\ &\text{sub}(20). \end{aligned} \quad (21)$$

3 Multi-Stage Bradley-Terry Model によるバイナリ AHP

簡単のために 2-stage Bradley-Terry model を考える。パラメータ σ を導入すると、 $\sigma = 1$ とした通常の重要度集合 $(i, j) \in E_1$ と $\sigma < 1$ とした重要度の高い集合 $(i, j) \in E_2$ に分けられ、以下のようになる。

$$p_{ij} = u_i^\sigma / (u_i^\sigma + u_j^\sigma) \quad (22)$$

ただし、 $E_1 \cap E_2 = \phi$ (empty set)、 $E_1 \cup E_2 = \{(i, j) | r_{ij} > 0, i < j\}$ であり、 σ の値が小さいほど高い重要度となることに注意。

Multi-Stage Bradley-Terry Model では σ のかわりに w_{ij} を導入し、以下のようにする。

$$p_{ij} = u_i^{w_{ij}} / (u_i^{w_{ij}} + u_j^{w_{ij}}) \quad (23)$$

誤差とその分散は以下になる。

$$e_{ij} = (\dot{x}_{ij}(\theta) - 1)u_i^{w_{ij}} + \dot{x}_{ij}(\theta)u_j^{w_{ij}}, \quad (24)$$

$$V[e_{ij}] = (u_i u_j)^{w_{ij}} / r_{ij} \quad (25)$$

誤差分散が定数になるように変数変換すると以下になる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{\sqrt{r_{ij}}}{\sqrt{(u_i u_j)^{w_{ij}}}} e_{ij} \\ &= \bar{y}_{ij} \sqrt{\left(\frac{u_i}{u_j}\right)^{w_{ij}}} + y_{ij} \sqrt{\left(\frac{u_j}{u_i}\right)^{w_{ij}}}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\varepsilon_{ij}^2 = \bar{y}_{ij}^2 \left(\frac{u_i}{u_j}\right)^{w_{ij}} + y_{ij}^2 \left(\frac{u_j}{u_i}\right)^{w_{ij}} + 2y_{ij}\bar{y}_{ij} \quad (27)$$

a_{ij} ((17), (19)) を導入すると問題は以下になる。

$$\begin{aligned} \min_{u>0} f(u) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\frac{u_j}{u_i}\right)^{w_{ij}} \quad \text{sub}(20), \\ a_{ij} &\geq 0, \quad a_{ii} = 0, \quad w_{ij} = w_{ji} > 0 \end{aligned} \quad (28)$$

4 Multi-Stage Bradley-Terry Model バイナリ AHP の解法

(28) は幾何計画問題であるが、次の変換を行うことで凸関数の最小化問題に帰着される。

$$e^{x_\nu} = (u_j / u_i)^{w_{ij}} \quad (29)$$

ここで $\nu = 1, \dots, N$ で N は (28) の項の数である。(29) について対数をとると以下になる。

$$x_\nu = -w_{ij}\dot{u}_i + w_{ij}\dot{u}_j, \quad (\dot{u}_i = \ln u_i) \quad (30)$$

(30) の行列表現は次のようになる。

$$x = E \dot{u} \quad (31)$$

ここで、 $x = [x_1, \dots, x_N]^T$ 、 $\dot{u} = [\dot{u}_1, \dots, \dot{u}_n]^T$ 、 E は exponent matrix と呼ばれる $N \times n$ 行列である。さらに (20) は次のように変換される。

$$\dot{u}_1 + \dots + \dot{u}_n = 0 \quad (32)$$

変換された問題は以下ようになる。

$$\min g(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^N a_{\nu} e^{x_{\nu}} \quad \text{sub} \quad \mathbf{x} = \mathbf{E} \dot{\mathbf{u}} \quad \text{sub}(32) \quad (33)$$

ここで、 a_{ν} は ν 番目の a_{ij} である。

(33) は Gradient 法 [11] で解くことができる。

5 適用例

Multi-Stage Bradley-Terry Model の適用例として図 1 に示す 4 チームのトーナメント戦での順位決定を取り上げる。

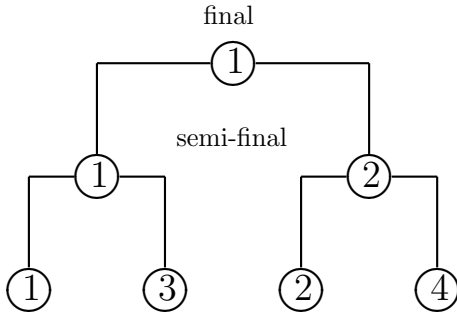


図 1 Tournament games

仮にチーム 3 とチーム 4 が対戦してチーム 3 が勝ったとする。通常の Bradley-Terry Model では図 2 に示すように各対戦の重要度はすべて 1 となる。

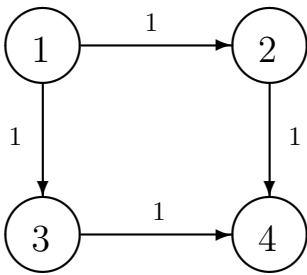


図 2 通常の Bradley-Terry Model

得られた各チームのウエイトは

$$[0.56250, 0.18750, 0.18750, 0.06250]$$

となってチーム 2 とチーム 3 が同評価で順位がつかない。

Multi-Stage Bradley-Terry Model では図 3 に示すように各対戦の重要度を $w_{12} = 0.5$, $w_{13} = w_{24} = 1$, $w_{34} = 2$ とする。

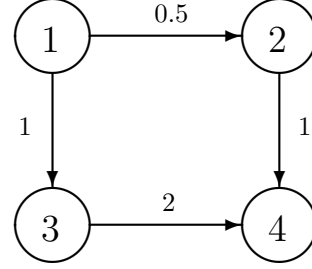


図 3 Multi-Stage Bradley-Terry Model

得られた各チームのウエイトは

$$[0.585826, 0.184487, 0.149200, 0.080487]$$

となって全チームの順位が確定した。詳細を以下に示す。

ここでは $\theta = 1/4$ とした時、(17),(19) から $a_{12} = a_{13} = a_{24} = a_{34} = 9/16$, $a_{21} = a_{31} = a_{42} = a_{43} = 1/16$ より、 $g(\mathbf{x})$ は以下ようになる。

$$g(\mathbf{x}) = \frac{9}{16}(e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3} + e^{x_4}) + \frac{1}{16}(e^{-x_1} + e^{-x_2} + e^{-x_3} + e^{-x_4}) \quad (34)$$

したがって問題は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \min g(\mathbf{x}) &= f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \\ &= (9e^{x_1} + e^{-x_1}) + (9e^{x_2} + e^{-x_2}) \\ &\quad + (9e^{x_3} + e^{-x_3}) + (9e^{x_4} + e^{-x_4}) \\ \text{sub } \dot{u}_1 + \dot{u}_2 + \dot{u}_3 + \dot{u}_4 &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

ただし、 $\dot{u}_i = \ln u_i$, ($i = 1, \dots, 4$) で、 $x_1 = 0.5(\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$, $x_2 = (\dot{u}_3 - \dot{u}_1)$, $x_3 = (\dot{u}_4 - \dot{u}_2)$, $x_4 = 2(\dot{u}_4 - \dot{u}_3)$ である。行列表現は以下ようになる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{bmatrix}$$

また、 $\dot{u}_1 + \dot{u}_2 + \dot{u}_3 + \dot{u}_4 = 0$ の関係から $\dot{u}_1 = -(\dot{u}_2 + \dot{u}_3 + \dot{u}_4)$ より変数が 1 つ減少し、以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{bmatrix}$$

よって、解くべき問題は以下ようになる。

$$\begin{aligned}\min g(\mathbf{x}) &= \min g(\mathbf{E}\dot{\mathbf{u}}) \\ &= \min \varphi(\dot{\mathbf{u}}) \\ &= \sum_i \sum_j a_{ij} e^{(\dot{u}_j - \dot{u}_i) w_{ij}} \quad (36)\end{aligned}$$

初期値を $\dot{\mathbf{u}} = [\dot{u}_2, \dot{u}_3, \dot{u}_4]^T = [0, 0, 0]^T$ 、 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = \mathbf{E}\dot{\mathbf{u}} = [0, 0, 0, 0]^T$ として Gradient 法で解くと、35回の繰り返しで収束し、

$$\dot{\mathbf{u}} = [-0.028415, -0.240709, -0.857903]^T$$

が得られ、変数の数を元に戻すと

$$\hat{\mathbf{u}} = [1.127027, -0.028415, -0.240709, -0.857903]^T$$

となった。

そして、対数をはずすと

$$\hat{\mathbf{u}} = e^{\hat{\mathbf{u}}} = [3.086466, 0.971985, 0.786070, 0.424050]^T$$

となり、総和を1に正規化すると

$$\hat{\mathbf{u}} = [0.585826, 0.184487, 0.149200, 0.080487]^T$$

が得られた。

このように、図2に示す各対戦の重要度がすべて同じである従来の方法では順位がつかなかったのが、各対戦に重要度を加味することにより全チームの順位が確定した。

6 まとめ

本研究ではバイナリ AHP の解法として Multi-Stage Bradley-Terry Model による WLS を提案し、トーナメントの順位付けに適用し、以下のことが得られた。

- (1) WLS を基にした解法について、変数変換により誤差分散一定のモデルを作ることができた。
- (2) Bradley-Terry Model を拡張した Multi-Stage Bradley-Terry Model を提案し、一対比較の重要度を設定できるようになった。
- (3) 提案した手法は幾何計画問題に変換し、Gradient 法で解けること示した。

今後の問題点として、一対比較の重要度をいかに設定するかが課題である。

参考文献

- [1] R.A. Bradley and M.E. Terry: Rank analysis of incomplete block designs –The method of paired comparisons–. *Biometrika*, **39**, 234–335 (1952)
- [2] J.G. Ecker: Geometric programming: methods, computations and applications. *SIAM REVIEW*, **22**, 338–362 (1980)
- [3] S. Furuya: *Gyouretsu to gyouretsushiki*. Baihukan, Tokyo (1975) (In Japanese)
- [4] K. Nishizawa and I. Takahashi: Estimation methods by stochastic model in binary and ternary AHP. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **50**, 101–122 (2007)
- [5] K. Nishizawa and I. Takahashi: Weighted and logarithmic least square methods for mutual evaluation network system including AHP and ANP. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **52**, 221–244 (2009)
- [6] E.L. Peterson: Geometric programming. *SIAM REVIEW*, **18**, 1–51 (1976)
- [7] C.R. Rao: *Linear statistical inference and its applications*. Wiley, New York (1980)
- [8] I. Takahashi: AHP applied to binary and ternary comparisons. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **33**, 199–206 (1990)
- [9] I. Takahashi, R. Kobayashi and Y. Koyanagi: *Tokei kaiseki*. Baifukan, Tokyo (1992) (In Japanese)
- [10] I. Takahashi: Variable separation principle for mathematical programming *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **6**, 82–105 (1964)
- [11] I. Takahashi: A note on the conjugate gradient method. *Information Processing in Japan*, **5**, 45–49 (1965)
- [12] K. Takeuchi: *Kakuritsubunpu to tokeikaiseki Nihon kikakukyokai*, Tokyo (1975) (In Japanese)