

遊戯ゲームの情報構造と数理分析

－（その3）High & Lowゲームの頻度分析－

日大生産工

○篠原 正明

（財）計量計画研究所

茂木 渉

青山学院大(院)

日高 啓太郎

1. はじめに

パチンコ、パチスロ、ボードゲーム、PCゲーム等の遊戯ゲームの1つである「High & Lowゲーム」について、動作遷移を（有限）マルコフ連鎖としてモデル化し、「大当たり」までの平均試行回数の分析ならびに関連する頻度分析を行う。本論文では、過渡モデルに注目し、その頻度分析を行う。

2. High & Lowゲーム

ゲーム開始状態をS，終了状態（大当たり）をTとした過渡モデル（図1）を本論文では分析対象とする。

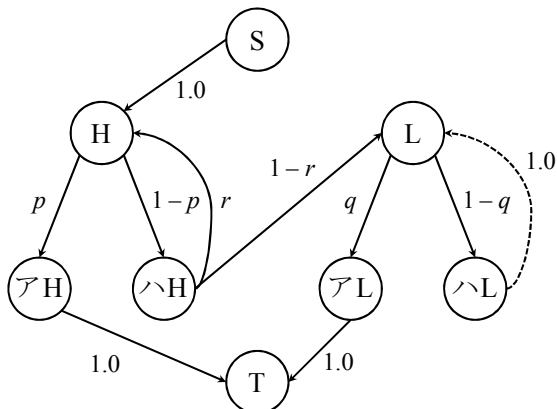


図1: High & Lowゲームの動作遷移図（過渡モデル）

High状態は幸運な状態に対応し、アタリの確率は高く、一方でLow状態は不運な状態に対応し、アタリの確率は低い。過渡モデル（図1）では、人生の最初はHigh状態からスタートし、High状態に留まっている間は人生の成功者（アタリでAH）となる確率も高いが、時間経過と共に墮落してLow状態に落ち

てしまい、なかなか人生の成功者（アタリでAL）とはなれない状況を表現する。人生の成功者（例えば、一攫千金）の「AH」あるいは「AL」に到達した時点でゲームは終了である。

一方、前論文で扱った定常モデルでは、人生の成功者となった時点で再度ゲームを再開し、ゲームが永遠に継続するとしたモデルである。

3. 過渡モデルの分析による頻度特性

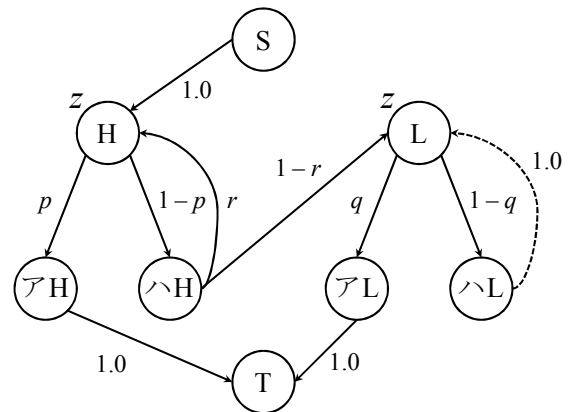


図2: High & Lowゲームの過渡z変換モデル

図2にz変換シグナルフローグラフを示す。H状態とL状態のみにzを付与し、AH、AH、AL、HLの各状態では時間遅延が無いとし、zを付与しない。SからTへのシグナルフローグラフ利得 $G_{ST}(z)$ は(1)～(3)で与えられる。

$$G_{ST}(z) = H(z) + L(z) \quad (1)$$

$$H(z) = \frac{pz}{1 - (1-p)rz} \quad (2)$$

$$L(z) = \frac{(1-p)(1-r)qz^2}{(1-(1-p)rz)(1-(1-q)z)} \quad (3)$$

$H(z)$ はSからアHを経由してTへ、 $L(z)$ はSからアLを経由してTへのシグナルフローグラフ利得である。 $H(z)$ の分子はSからアHへの経路利得積、分母はその経路途中の閉路利得 $(1-p)rz$ を1から引いた値である。同様に、 $L(z)$ の分子はSからアLへの経路利得積、分母はその経路途中の2つの独立な閉路利得、 $(1-p)rz$ と $(1-q)z$ 、を各々1から引いた値の積である。 $G_{ST}(z)$ 、 $H(z)$ 、 $L(z)$ を(4),(5),(6)のように展開すると、 a_i, b_i, c_i は以下の意味を持つ。

- a_i : i 回の試行回数でアタリ「大当たり」となる確率頻度
- b_i : High状態条件下で*i*回の試行回数でアタリ「大当たり」となる確率頻度
- c_i : Low状態条件下で*i*回の試行回数でアタリ「大当たり」となる確率頻度

$$G_{ST}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \quad (4)$$

$$H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i \quad (5)$$

$$L(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \quad (6)$$

$$\text{但し, } G_{ST}(1) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = 1 \quad (7)$$

$$H(1) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \quad (8)$$

$$L(1) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \quad (9)$$

$$a_i = b_i + c_i \quad (10)$$

$$H(1) + L(1) = 1 \quad (11)$$

ここで、 $H(1)$ はLow状態に移行しないでHigh状態のままアタリ「大当たり」となる確率、 $L(1)$ はLow状態に移行した後にアタリ「大当たり」となる確率、である。又、(13)式の $G'_{ST}(1)$ はアタリ「大当たり」とな

るまでの平均試行回数を与える。

$$\begin{aligned} G'_{ST}(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} i a_i z^{i-1} \\ &= H'(z) + L'(z) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} G'_{ST}(1) &= \sum_{i=0}^{\infty} i a_i \\ &= H'(1) + L'(1) \end{aligned} \quad (13)$$

なお、(13)式の $H'(1)$ と $L'(1)$ は、各々直接High状態經由とLow状態經由の、アタリ「大当たり」となるまでの平均試行回数 $N = G'_{ST}(1)$ への寄与分である。なお、直接High状態經由でアタリ「大当たり」となる平均試行回数 N_H とLow状態經由でアタリ「大当たり」となる平均試行回数 N_L は(14),(15)で与えられる。

$$N_H = \frac{H'(1)}{H(1)} \quad (14)$$

$$N_L = \frac{L'(1)}{L(1)} \quad (15)$$

又、統合したアタリ「大当たり」までの平均試行回数 $N = G'_{ST}(1)$ と N_H と N_L は(16)で関係づけられる。

$$N = H(1)N_H + L(1)N_L \quad (16)$$

例えば、(その2)と同様に、 $p=0.05, q=0.005, r=0.9$ と設定すると、以下の諸量を得る。

$$H(1) = 0.344828 \quad (17)$$

$$L(1) = 0.655172 \quad (18)$$

$$N_H = 6.896552 \quad (19)$$

$$N_L = 206.8966 \quad (20)$$

$$N = 137.931 \quad (21)$$

ところで、過渡モデルでは、

$$H(1) : L(1) = 0.344828 : 0.655172 = 1 : 1.9$$

(その2)の(14),(16)の定常モデルでは、

$x_{\text{H}} : x_{\text{L}} = 0.25 : 0.475 = 1 : 1.9$ となり、両モデルの対応する数値は完全に一致する。

さらに、(2)の $H(z)$ と(3)の $L(z)$ を(5),(6)と展開すると、以下の通りである。

$$H(z) = \frac{pz}{1-(1-p)rz} = pz \left(\sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)r)^k z^k \right) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \left(= \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i \right) \\ L(z) &= \frac{(1-p)(1-r)qz^2}{(1-(1-p)rz)(1-(1-q)z)} \\ &= (1-p)(1-r)qz^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)r)^k z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1-q)^k z^k \right) \\ & \left(= \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right) \end{aligned} \quad (23)$$

$H(z)$ を詳細に展開すると以下の通りである。

$$\begin{aligned} H(z) &= pz \left(1 + (1-p)rz + ((1-p)r)^2 z^2 + \dots \right) \\ &= pz + p(1-p)rz^2 + p((1-p)r)^2 z^3 + \dots + p((1-p)r)^k z^{k+1} + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} b_k &= p((1-p)r)^{k-1} \quad k \geq 1 \\ b_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$L(z)$ を詳細に展開すると以下の通りである。

$$\begin{aligned} L(z) &= (1-p)(1-r)qz^2 \left(1 + (1-p)rz + ((1-p)r)^2 z^2 + \dots \right) \times \\ & \quad \left(1 + (1-q)z + (1-q)^2 z^2 + \dots \right) \\ &= (1-p)(1-r)qz^2 \left(1 + ((1-p)r + (1-q))z \right. \\ & \quad \left. + ((1-p)r(1-q) + ((1-p)r)^2 + (1-q)^2)z^2 + \dots \right) \quad (26) \\ &= (1-p)(1-r)qz^2 + (1-p)(1-r)q((1-p)r + (1-q))z^3 \\ &+ (1-p)(1-r)q((1-p)r(1-q) + ((1-p)r)^2 + (1-q)^2)z^4 + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= 0, \quad c_1 = 0 \\ c_2 &= (1-p)(1-r)q \\ c_3 &= (1-p)(1-r)q((1-p)r + (1-q)) \\ c_4 &= (1-p)(1-r)q((1-p)r(1-q) + ((1-p)r)^2 + (1-q)^2) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

c_k の一般項($k \geq 2$)は次式(29)で与えられる。

$$c_k = (1-p)(1-r)q \sum_{i+j=k-2} ((1-p)r)^i (1-q)^j \quad k \geq 2 \quad (29)$$

(29)において、総和記号 Σ は $i+j=k-2$ となる $i=0, 1, 2, 3, \dots, j=0, 1, 2, 3, \dots$ の組み合わせについての総和である。

例えば、

$$\begin{aligned} k=2 & \cdots i+j=0 \text{なので} (i=0, j=0), \\ k=3 & \cdots i+j=1 \text{なので} (i=0, j=1) \text{と} (i=1, j=0), \\ k=4 & \cdots i+j=2 \text{なので} (i=0, j=2), (i=1, j=1) \text{と} \\ & \quad (i=2, j=0), \\ k=5 & \cdots i+j=3 \text{なので} (i=0, j=3), (i=1, j=2), \\ & \quad (i=2, j=1), (i=3, j=0), \end{aligned}$$

$\vdots$

(以下同様)

4. シミュレーションと理論値

以下にシミュレーション (ゲーム回数 = 10万回) とMathematicaによる理論値を示すが、両者はほぼ一致する。なお、(25),(29)式に基づき計算した a_1, a_2, a_3 を以下に示すが、図3のMathematicaによる理論値と一致する。

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.05+0=0.05, a_2 = 0.04275+0.000475 = 0.043225, \\ a_3 &= 0.0369573+0.0004726 = 0.0374299 \end{aligned}$$

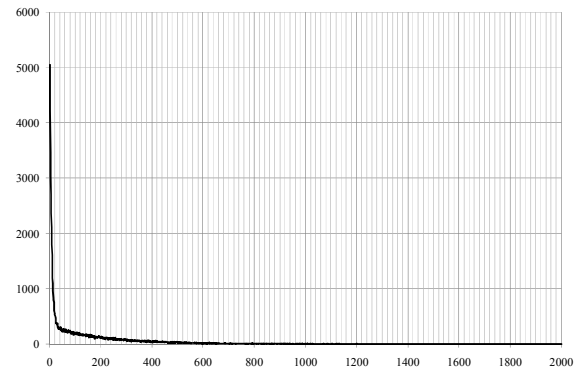


図4: 大当たりまでの試行回数頻度分布

なお、シミュレーションでの平均試行回数 = 131.5354であるが、(21)式の $N=137.931$ とほぼ一致する。

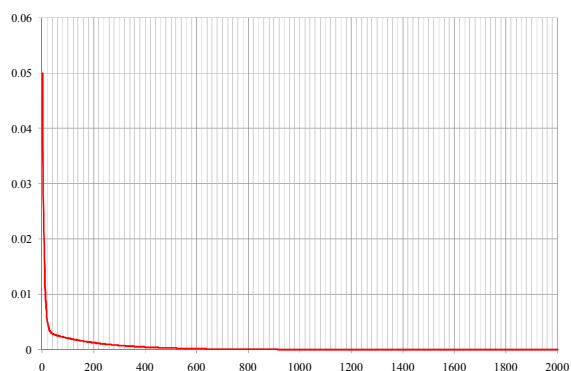


図5: 大当たりまでの試行回数頻度分布 (理論解)

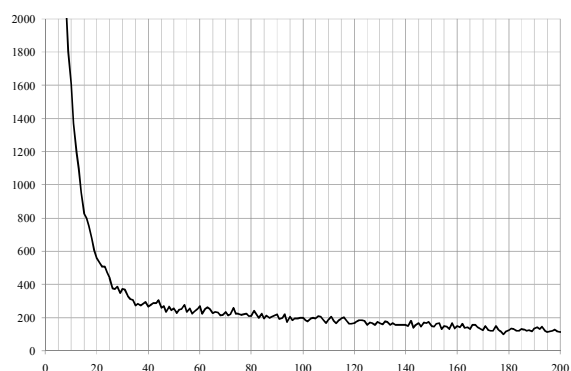


図6: シミュレーション (拡大1)

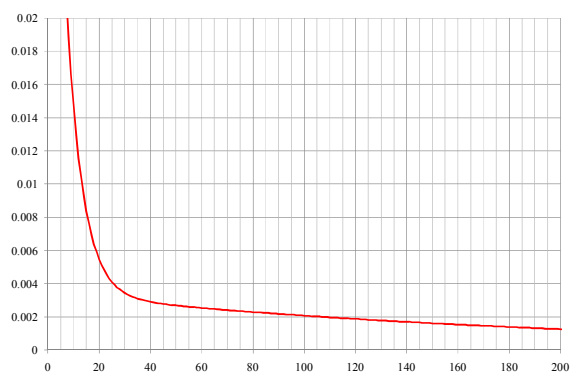


図7: 理論解 (拡大1)

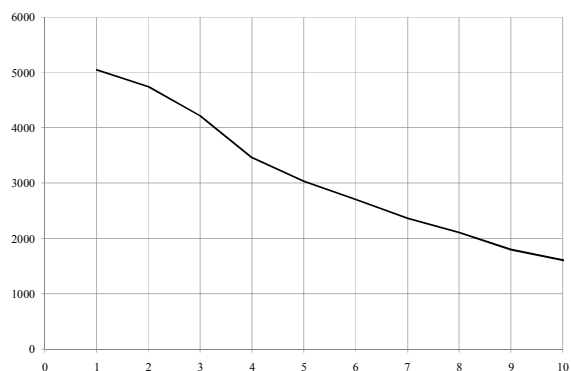


図8: シミュレーション (拡大2)

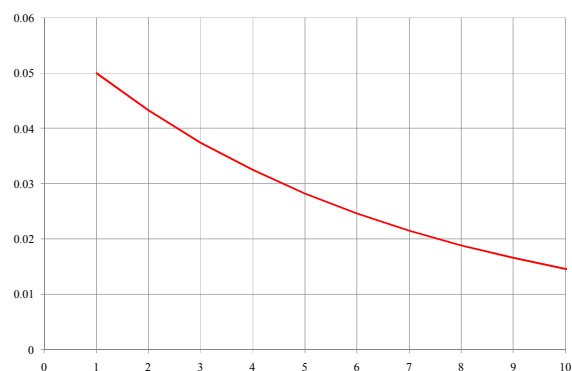


図9: 理論解 (拡大2)

5. おわりに

(その1)の研究対象のように、大逆転、起死回生など「**射幸心**をあおる」ネーミングを冠したパチンコ等のゲーム名は、たとえば、**CRふしぎの海のナディア起死回生**、**CRぱちんこ黒ひげ危機一発大逆転**……など数多い。いずれも最終段階において、大当たりする仕掛けを内包する。(その2)、(その3)の研究対象では、高確率状態Highと低確率状態Lowの間の状態遷移をモデル化した。(その3)の過渡モデルでは高確率状態Highに始まり低確率状態Lowで終了し、(その2)の定常モデルでは両状態間を遷移する。低確率状態Lowから高確率状態Highへの遷移(確率 $1-s$)が確率変動「**確変**」である。遷移確率 $1-s$ は確定値であるが、マルコフ連鎖モデルとしては、ランダム分岐の確率過程である。以上、(その1)～(その3)では、パチンコ、パチスロ等の遊戯ゲームの代表的な**射幸心**メカニズムをマルコフ連鎖モデルに基づき解析した。

今後の課題を以下に示す。

- ① 離散時間マルコフ連鎖から連続時間セミマルコフ過程によるモデル化。
- ② 状態、遷移に報酬利得が付随したマルコフ過程によるモデル化。
- ③ パチンコ店の出玉費用、顧客の支払い代金一定下で、顧客満足度最大化を達成する各種パラメータ決定法の確立、さらには、新しい**射幸心**メカニズムのデザイン確立。