

遊戯ゲームの情報構造と数理分析

－（その2）High & Lowゲームの定常マルコフモデル－

青山学院大(院)

○日高 啓太郎

日大生産工

篠原 正明

(財)計量計画研究所

茂木 渉

1. はじめに

パチンコ、パチスロ、ボードゲーム、PCゲーム等の遊戯ゲームの1つである「High & Lowゲーム」について、動作遷移を（有限）マルコフ連鎖としてモデル化し、「大当たり」までの平均試行回数の分析ならびに関連する頻度分析を行う。本論文では、定常マルコフモデルが周期的マルコフ連鎖となることに注目し、定常平均値特性を解析する。

H : High状態

L : Low状態

アH : High状態で籤引き試行でアタリ「大当たり」の状態

ハH : High状態で籤引き試行でハズレの状態

アL : Low状態で籤引き試行でアタリ「大当たり」の状態

ハL : Low状態で籤引き試行でハズレの状態

2. High & Lowゲーム

ゲーム開始状態をS，終了状態（大当たり）をTとすると，図1，図2に示す動作遷移図となる。

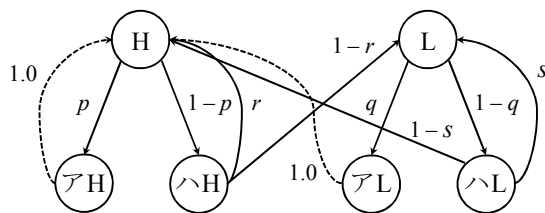


図1: High & Lowゲームの動作遷移図（定常モデル）

図1は大当たり後に確率1で「アH」と「アL」から，あるいは「ハL」から確率1-sでHigh状態に戻り，ゲーム試行中にHigh状態とLow状態を確率的に交互にとる定常モデル，図2はHigh状態からスタートし，一度Low状態に移行したらHigh状態には戻れない過渡モデルである。

3. 定常モデルの解析

図1の定常モデルは周期2のマルコフ連鎖であり，その確率行列 P は(1),(2),(3)式で与えられる。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_1 \\ P_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$P_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{アH} & \text{ハH} & \text{アL} & \text{ハL} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{H} \\ \text{L} \end{matrix} & \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-q \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2)$$

$$P_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{H} & \text{L} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{アH} \\ \text{ハH} \\ \text{アL} \\ \text{ハL} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1.0 & 0 \\ r & 1-r \\ 1.0 & 0 \\ 1-s & s \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (3)$$

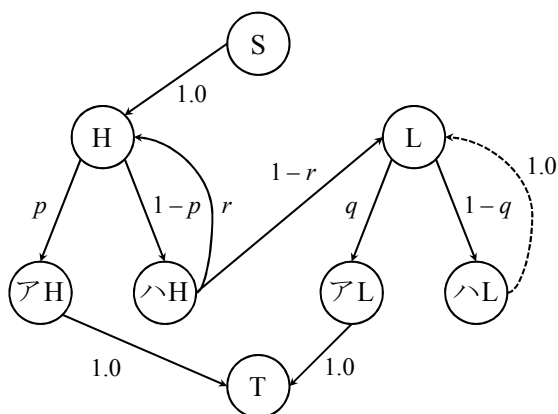


図2: High & Lowゲームの動作遷移図（過渡モデル）

但し、2つの「大当たり」状態（アHとアL）では、High状態に戻ってゲームを再スタートするとした。HとLの状態に注目した確率行列 $\mathbf{P}_{HL}$ は(4)で、アタリとハズレの状態に注目した確率行列 $\mathbf{P}_{アH}$ は(5)で与えられる。

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{HL} &= \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 \\ &= \begin{pmatrix} p + (1-p)r & (1-p)(1-r) \\ q + (1-q)(1-s) & (1-q)s \end{pmatrix} \quad (4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{アH} &= \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1 \\ &= \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ rp & r(1-p) & (1-r)q & (1-r)(1-q) \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ (1-s)p & (1-s)(1-p) & sq & s(1-q) \end{pmatrix} \quad (5)\end{aligned}$$

(4)より、HとLの定常状態確率 x_H, x_L は(6),(7)で与えられる（但し、 $x_H + x_L = 1$ ）。

$$x_H = \frac{q + (1-q)(1-s)}{(1-p)(1-r) + q + (1-q)(1-s)} \quad (6)$$

$$x_L = \frac{(1-p)(1-r)}{(1-p)(1-r) + q + (1-q)(1-s)} \quad (7)$$

(6),(7)と(2)より（あるいは、直接(5)より）アH、ハH、アL、ハLの定常状態確率 $x_{アH}, x_{ハH}, x_{アL}, x_{ハL}$ は(8)～(11)で与えられる（但し、 $x_{アH} + x_{ハH} + x_{アL} + x_{ハL} = 1$ ）。

$$\begin{aligned}x_{アH} &= x_H \times p \\ &= \frac{p(q + (1-q)(1-s))}{(1-p)(1-r) + q + (1-q)(1-s)} \quad (8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{ハH} &= x_H \times (1-p) \\ &= \frac{(1-p)(q + (1-q)(1-s))}{(1-p)(1-r) + q + (1-q)(1-s)} \quad (9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{アL} &= x_L \times q \\ &= \frac{q(1-p)(1-r)}{(1-p)(1-r) + q + (1-q)(1-s)} \quad (10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{ハL} &= x_L \times (1-q) \\ &= \frac{(1-q)(1-p)(1-r)}{(1-p)(1-r) + q + (1-q)(1-s)} \quad (11)\end{aligned}$$

例えば、パラメータ p, q, r, s を以下に設定すると、(12)～(19)式を得る。

$$\text{High状態で大当たりする確率} : p = 0.05$$

$$\text{Low状態で大当たりする確率} : q = 0.005$$

$$\text{High状態継続確率} : r = 0.9$$

$$\text{Low状態継続確率} : s = 1.0$$

$$x_H = 0.05 \quad (12)$$

$$x_L = 0.95 \quad (13)$$

$$x_{アH} = 0.0025 \quad (14)$$

$$x_{ハH} = 0.0475 \quad (15)$$

$$x_{アL} = 0.00475 \quad (16)$$

$$x_{ハL} = 0.94525 \quad (17)$$

$$x_{ア} = x_{アH} + x_{アL} = 0.00725 \quad (18)$$

$$x_{ハ} = x_{ハH} + x_{ハL} = 0.99275 \quad (19)$$

すなわち、本例ではゲーム機（マシン）がHigh状態である時間確率は(12)より5%（1日24時間稼働ならば、72分）、大当たり状態である時間確率は(18)より0.725%（1日24時間稼働ならば、10.44分）となる。又、大当たり状態 $x_{ア} = 0.725\%$ においてHigh状態とLow状態の寄与率は、 $0.25\% + 0.475\% = 0.725\%$ なので、「0.25 : 0.475」、ほぼ「1 : 2」（正確には、「1 : 1.9」）となり、Low状態の寄与が倍大きいこと等もわかる。すなわち、Low状態での大当たり確率は10分の1と小さいが、Low状態の状態確率が約20倍と大きいので、結果として約2倍の寄与となる。

4. おわりに

「High & Lowゲーム」の定常マルコフモデルについて統計分析を行い、シミュレーション値と理論値を比較した。過渡モデルによる分析については文献[1]（その3）を参照のこと。

参考文献

- [1] 篠原正明，茂木渉，日高啓太郎：遊戯ゲームの情報構造と数理分析—（その3）High & Lowゲームの頻度分析—,第43回日本大学生産工学部・学術講演会・数理情報部会（2010.12.4）。