

遊戯ゲームの情報構造と数理分析

－（その1）起死回生・大逆転ゲームのマルコフモデル－

（財）計量計画研究所

○茂木 渉

日大生産工

篠原 正明

青山学院大(院)

日高 啓太郎

1. はじめに

パチンコ、パチスロ、ボードゲーム、PCゲーム等の遊戯ゲームの1つである「起死回生・大逆転ゲーム」について、動作遷移を（有限）マルコフ連鎖としてモデル化し、ゲーム終了までの平均試行回数の分析ならびに関連する頻度分析を行う。

2. 起死回生・大逆転ゲーム

ゲーム開始状態をS，終了状態をTとすると，図1に示す動作遷移図となる。

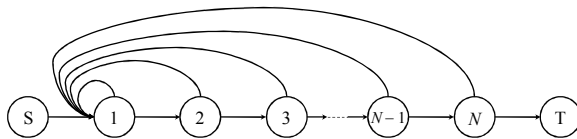


図1: 起死回生・大逆転ゲームの動作遷移図

①は第*i*回の試行状態を表し，「ハズレ」では第*i*+1回の試行状態①へ，「アタリ」では第1回の試行状態①へ遷移する。又，土壇場の試行状態⑤で「ハズレ」が出ると，終了状態Tへ移行し，ゲーム終了である。ここで，①での「アタリ」の確率を p_i ($1 \leq i \leq N$) とするとき，起死回生・大逆転ゲームでは通常 $p_i = p$ ($1 \leq i \leq N-1$)， $p_N = q$ ，で， p は小さく（例えば，0.01）， q は大きく（例えば，0.5）設定する。

Sが誕生，Tが死滅，①→①の遷移が加齢と考えれば，「アタリ」は1才①への若返りを意味し，さらに最後の土壇場⑤では，その若返りの確率 q が大きくなっている。これが，ゲーム名「起死回生・大逆転ゲーム」の由来である。

3. マルコフモデル

図1の動作遷移図に遷移確率を記入したマルコフ連鎖を図2に示す。

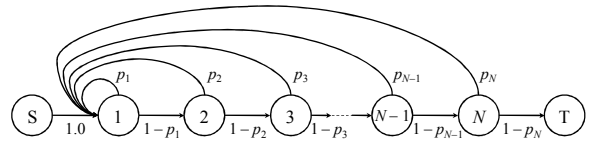


図2: 起死回生・大逆転ゲームのマルコフモデル

4. 平均値特性

$x(i)$ を状態*i*の平均試行回数とすると，以下の関係式が成立する。

$$x(i) = (1 - p_{i-1})x(i-1) \quad 2 \leq i \leq N+1 \quad (1)$$

$$x(1) = \sum_{j=1}^N p_j x(j) + x(0) \quad (2)$$

$$x(0) = x(N+1) \quad (3)$$

但し， $x(0)=x(S)$ ， $x(N+1)=x(T)$ である。又，(1)を詳細に表現すると以下の通りである。

$$\left. \begin{aligned} x(2) &= (1 - p_1)x(1) \\ x(3) &= (1 - p_2)x(2) \\ x(4) &= (1 - p_3)x(3) \\ &\vdots \\ x(N+1) &= (1 - p_N)x(N) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

従って，

$$x(N) = \frac{x(N+1)}{1 - p_N}$$

$$\begin{aligned}
x(N-1) &= \frac{x(N+1)}{(1-p_N)(1-p_{N-1})} \\
&\vdots \\
x(4) &= \frac{x(N+1)}{(1-p_N)(1-p_{N-1})\cdots(1-p_4)} \\
x(3) &= \frac{x(N+1)}{(1-p_N)(1-p_{N-1})\cdots(1-p_4)(1-p_3)} \\
x(2) &= \frac{x(N+1)}{(1-p_N)(1-p_{N-1})\cdots(1-p_4)(1-p_3)(1-p_2)} \\
x(1) &= \frac{x(N+1)}{(1-p_N)(1-p_{N-1})\cdots(1-p_4)(1-p_3)(1-p_2)(1-p_1)}
\end{aligned}$$

を得る。すなわち、(5)式となる。

$$x(i) = \frac{x(N+1)}{(1-p_N)(1-p_{N-1})\cdots(1-p_{i+1})(1-p_i)} \quad 1 \leq i \leq N \quad (5)$$

ゲーム全体としてゲーム開始から終了までの平均停留回数 (=平均ゲーム長) を T とするならば、(3)式において $x(0) = x(N+1) = 1.0$ とし、(6)式において T を評価する。

$$T = \sum_{j=1}^N x(j) \quad (6)$$

起死回生・大逆転ゲームのパラメータ $p_i = p$ ($1 \leq i \leq N-1$), $p_N = q$ を代入すると、次式(7)を得る。

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{1-q} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{(1-q)^j} \\
&= \frac{1-p}{1-q} \frac{1}{p} \left(\frac{1}{(1-p)^N} - 1 \right) \quad (7)
\end{aligned}$$

例えば、 $N=20, p=0.05, q=10/19$ とすると、(8)を得る。

$$T \doteq 71.78 \quad (8)$$

5. 頻度特性

図3に起死回生・大逆転モデルの z -変換マルコフモ

デル (シグナルフローグラフ) を示す。 (1),(2) に関して z -変換後の関係式を以下に示す (但し、 z -変換後の $x(i)$ について同じ記号を使用)。

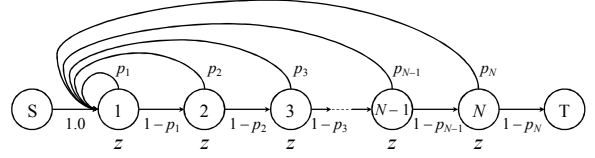


図3: 起死回生・大逆転ゲームの z -変換シグナルフローグラフ

$$x(i) = (1-p_{i-1})zx(i-1) \quad 2 \leq i \leq N+1 \quad (9)$$

$$x(1) = \sum_{j=1}^N p_j zx(j) + zx(0) \quad (10)$$

(9),(10)を変形して、(11)式で定まるS-T間の z -変換利得 $G_{ST}(z)$ を求める。

$$x(T) = G_{ST}(z)x(S) \quad (11)$$

ここで、S-T間のシグナルフローグラフ利得 $G_{ST}(z)$ は以下の再帰関係式によっても求めることができる。

$$P_0(z) = 1 \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1(z) &= \frac{(1-p_1)zP_0(z)}{1-P_0(z)p_1z} \\ P_2(z) &= \frac{(1-p_2)zP_1(z)}{1-P_1(z)p_2z} \\ &\vdots \\ P_N(z) &= \frac{(1-p_N)zP_{N-1}(z)}{1-P_{N-1}(z)p_Nz} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$G_{ST}(z) = P_N(z) \quad (14)$$

(13)式の再帰関係式は(15)で表現できる。

$$P_i(z) = \frac{(1-p_i)zP_{i-1}(z)}{1-P_{i-1}(z)p_i z} \quad 1 \leq i \leq N \quad (15)$$

例えば、 $N=3, p_1=p_2=p, p_3=q$ とすると (図4) , 以下を得る。

$$P_1(z) = \frac{(1-p)z}{1-p} \quad (16)$$

$$P_2(z) = \frac{(1-p)zP_1(z)}{1-P_1(z)pz} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} G_{ST}(z) &= P_3(z) \\ &= \frac{(1-q)zP_2(z)}{1-P_2(z)qz} \end{aligned} \quad (18)$$

(17)に(16)を代入し、(17)を(18)に代入すると、(19)を得る。

$$G_{ST}(z) = \frac{(1-p)^2(1-q)z^3}{1-pz-(1-p)pz^2-(1-p)^2qz^3} \quad (19)$$

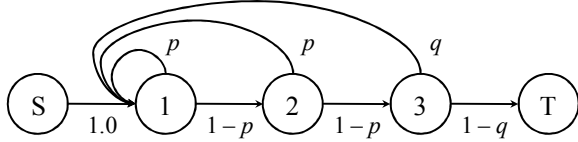


図 4: $N=3, p_1=p_2=p, p_3=q$ のシグナルフローグラフ

(19)式の分子において、 z^3 の係数は経路 $S \rightarrow ① \rightarrow ② \rightarrow ③ \rightarrow T$ の経路利得積、分母において z の係数は①の自己閉路、 z^2 の係数は閉路 $① \rightarrow ② \rightarrow ①$ 、 z^3 の係数は閉路 $① \rightarrow ② \rightarrow ③ \rightarrow ①$ の閉路利得積に対応していることがわかる。

又、 $G_{ST}(z) = \sum a_i z^i$ と展開した時の a_i が試行回数 $=i$ でSからTへ到達する頻度を表しているの、(20)を得る。

$$\begin{aligned} G_{ST}(z) &= \frac{(1-p)^2(1-q)z^3}{1-pz-(1-p)pz^2-(1-p)^2qz^3} \\ &= a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、 $a_3, a_4, a_5, \dots$ は以下の通りである。

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= (1-p)^2(1-q) \\ a_4 &= (1-p)^2(1-q)p \\ a_5 &= (1-p)^2(1-q)(p^2 + (1-p)p) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

一般の N で、 $p_i = p (1 \leq i \leq N-1), p_N = q$ の場合(22)と一般の N と p_i の場合(23)のS-T間シグナルフローグラフ利得 $G_{ST}(z)$ を以下に示す。

$$\begin{aligned} G_{ST}(z) &= \frac{(1-p)^{N-1}(1-q)z^N}{1-pz-(1-p)pz^2-(1-p)^2pz^3-\dots-(1-p)^{N-1}qz^N} \\ &= \frac{(1-p)^{N-1}(1-q)z^N}{1-\left(\sum_{i=1}^{N-1} (1-p)^{i-1} pz^i + (1-p)^N qz^N\right)} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} G_{ST}(z) &= \frac{(1-p_1)(1-p_2)\dots(1-p_N)z^N}{\left(1-p_1z-(1-p_1)p_2z^2-(1-p_1)(1-p_2)p_3z^3-\dots\right)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^N (1-p_i)z^N}{1-\sum_{i=1}^N \left(\prod_{j=1}^{i-1} (1-p_j)\right) p_i z^i} \end{aligned} \quad (23)$$

6. シミュレーション

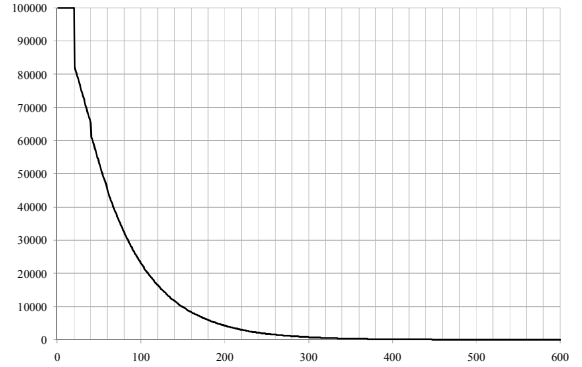


図5: 到達回数累積分布 ($N=20, p=0.05, q=10/19$, ゲーム回数=10万回)

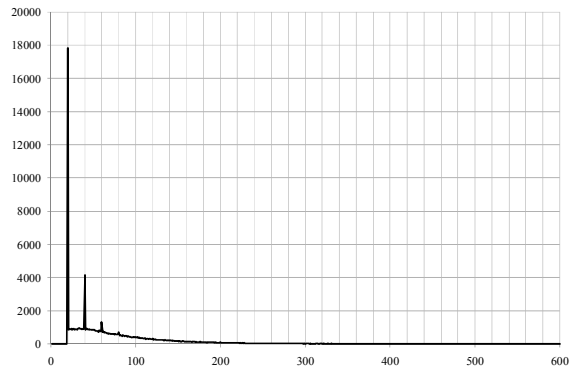


図6: 到達回数頻度分布 ($N=20, p=0.05, q=10/19$, ゲーム回数=10万回)

7. おわりに

「起死回生・大逆転ゲーム」をマルコフ連鎖としてモデル化し、シグナルフローグラフ技法を用いて各種統計分析を行った。シミュレーション値と理論値は合致した。

付録1 シグナルフローグラフのS-T間利得 G_{ST} に関するMason公式

シグナルフローグラフは信号流れ線図ともよばれ、制御工学、電気工学、通信工学などの分野において、対象をネットワーク表現して解を求める生産現場に密着した問題解決手法である。生産現場の技術者などが、連立方程式を直接解く代わりに、問題の特質をネットワーク表現し、問題の構造面を反映した陽表現解（トポロジー公式とも呼ばれる）を導くことができる。連立方程式の数値解法が非常に容易となった今日では、シグナルフローグラフを用いた求解法はほとんど使われていないようだ。陽表現解（トポロジー公式）を与えるMason公式を以下に説明する。

$$G_{ST} = \sum_k P_k \Delta_k / \Delta \quad (A1.1)$$

但し、 $\Delta = 1 - (\text{すべてのループゲインの和}) + (\text{すべての2つの点疎なループのゲイン積の和}) - (\text{すべての3つの点疎なループのゲイン積の和}) + (\text{すべての4つの点疎なループのゲイン積の和}) - \dots$

$P_k = k$ 番目のS-T間単純パスのパスゲイン

$\Delta_k = k$ 番目のS-T間単純パスを開放除去したシグナルフローグラフの Δ

付録2 Mathematicaによる理論解

一般の N の場合 (22)式または(23)式) でも $G_{ST}(z)$ を $\sum a_i z^i$ と級数展開できれば、試行回数 $=i$ でSからTへ到達する頻度を得ることが可能である。 i が大きくなると手計算による展開は困難になるが、Mathematicaを用いることで容易に展開が可能である。その方法を以下に示す。使用する関数は次の3つである。

$\text{Series}[f(x), \{x, x_0, n\}]$

$f(x)$ の $x=x_0$ に関する n 次までの級数展開。

$\text{Coefficient}[f(x), x, i]$

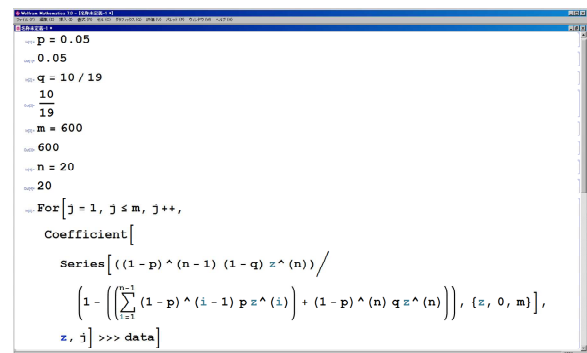
多項式 $f(x)$ の x^i の係数を返す。

$\text{For}[i=\alpha, i \leq \beta, i++, f(x)]$

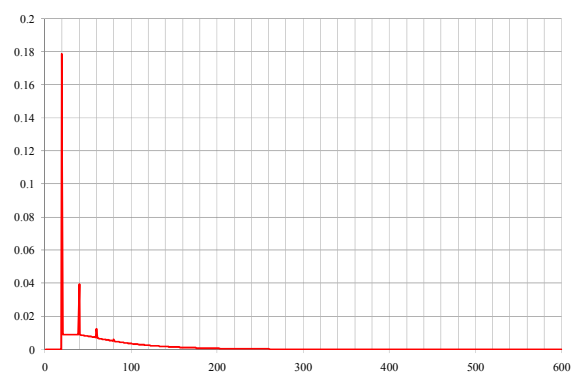
初期条件 $i=\alpha$ 、停止条件 $i \leq \beta$ として $f(x)$ を繰り返し、ループの最後に i を1つインクリメントする。

これらを組み合わせた、(22)式の級数展開を得るためのプログラムと、その実行画面、及び結果の理論頻度分布を以下に示す（但し、 m は展開を打ち切る次数、 $\ggg$ dataはファイル名「data」というファイルに j での値を追加出力することを意味する）。

$\text{For}[j=1, j \leq m, j++, \text{Coefficient}[\text{Series}[(\text{「(22)式」}), \{z, 0, m\}], z, j] \ggg \text{data}]$



図A1: Mathematicaでの実行画面



図A2: 到達回数頻度分布（理論値）

ところで、最初のピーク値は試行回数 $i=20$ で出現し、その頻度値 a_{20} は以下で与えられるが、図A2の理論値と一致する。

$$a_{20} = (0.95)^{19} (9/19) \doteq 0.1787 \quad (A2.1)$$