7-33

評価平均モデルにもとづくAHP固有ベクトル法とパス代数における固有ベクトル

日大生産工(院)　○金成賢作
日大生産工　篠原正明

1.　はじめに

ある項目 k の評価ウェイト w_k を相対比較集合 S_k に属する項目との一対比較に基づく相対比較値の何らかの平均操作により決定する評価平均モデルにおいて、完全一対比較情報下での Saaty 博士による AHP 固有ベクトル法が自然な形で導かれる点を説明する。更に、評価平均モデルに基づき AHP 固有ベクトル法を一般化する。ここで、評価平均モデルに基づく AHP 固有ベクトル法の一般化が、パス代数における固有ベクトル概念と解釈できることを提案する。更に、不完全一対比較情報下では、Saaty 型 AHP 固有ベクトル法は Harker 法に帰着する点も証明する。

2.　評価平均モデル

項目 k のウェイト w_k を項目 k の相対比較集合 S_k に属する項目 $j\in S_k$ との一対比較値 a_{kj}(項目 k は項目 j を基準に何倍重要か?)に基づく評価比較値 $a_{kj}w_j$ を用いて、S_k に属する項目 j 全体の何らかの平均操作により(1)式の評価平均モデルで決定する(図 1)。

$$w_k \leftarrow \frac{1}{|S_k|}F(a_{k1}w_1, a_{k2}w_2, \cdots, a_{kn}w_n) \tag{1}$$

但し、$S_k=\{1,2,\cdots,n\}, |S_k|=n$ より一般的に(2)式で記述できる。

$$w_k \leftarrow G(a_{k1}w_1, a_{k2}w_2, \cdots, a_{kn}w_n) \tag{2}$$

例えば、算術平均ならば評価平均モデル式は(3)となる。

$$\begin{aligned} w_k &\leftarrow \frac{1}{|S_k|}(a_{k1}w_1 + a_{k2}w_2 + \cdots + a_{kn}w_n) \\ &= \frac{1}{|S_k|}\sum_{j\in S_k} a_{kj}w_j \end{aligned} \tag{3}$$

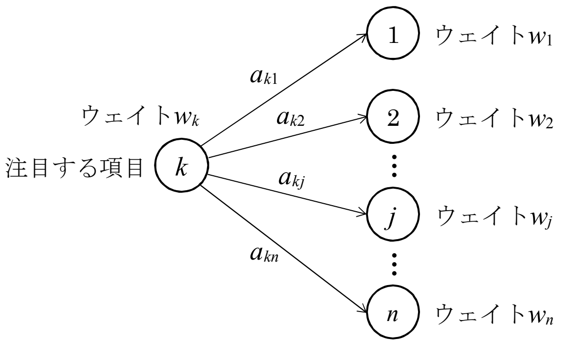

図 1: 評価平均モデル

3.　算術平均の評価平均モデル

3.1　完全情報の場合

項目数 N=4 の場合について、以下に例示する。

［例 1］　$N=4, S_k=\{1,2,3,4\}(k=1,2,3,4)$。自分自身も含めた 4 項目の算術平均によりウェイトを決定するモデルである。

$$\begin{aligned} w_1 &\leftarrow \frac{1}{4}(a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + a_{13}w_3 + a_{14}w_4) \\ w_2 &\leftarrow \frac{1}{4}(a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + a_{23}w_3 + a_{24}w_4) \\ w_3 &\leftarrow \frac{1}{4}(a_{31}w_1 + a_{32}w_2 + a_{33}w_3 + a_{34}w_4) \\ w_4 &\leftarrow \frac{1}{4}(a_{41}w_1 + a_{42}w_2 + a_{43}w_3 + a_{44}w_4) \end{aligned} \tag{4}$$

（例 1 終り）

ベクトル行列表現では(5)式となる。

$$\boldsymbol{w} \leftarrow \frac{1}{N}A\boldsymbol{w} \tag{5}$$

Saaty 型固有ベクトル法では(6)式の反復形である。

$$\boldsymbol{w} \leftarrow A\boldsymbol{w} \tag{6}$$

すなわち、Saaty 型固有ベクトルでは一対比較行列 A の右主固有ベクトル、算術平均・評価平均モデルでは

AHP Eigenvecter Interpreted from the Model of Averaging Pairwise Evaluation Values and Eigenvector Concept in Path Algebra

Kensaku KANARI and Masaaki SHINOHARA

$\frac{1}{N}$A の右主固有ベクトルを求めているが、固有値が N 分の 1 になるだけで、固有ベクトルは同じである。

3.2　不完全情報の場合

［例 2］　N=4, S_k={1,2,3,4}−{k}(k=1,2,3,4)。自分自身は含めない他 3 項目との算術平均により、ウェイトを決定するモデルである。

$$
\begin{aligned}
w_1 &\leftarrow \frac{1}{3}\left(\qquad\quad a_{12}w_2 + a_{13}w_3 + a_{14}w_4 \right)\\
w_2 &\leftarrow \frac{1}{3}\left(a_{21}w_1 \qquad\quad + a_{23}w_3 + a_{24}w_4 \right)\\
w_3 &\leftarrow \frac{1}{3}\left(a_{31}w_1 + a_{32}w_2 \qquad\quad + a_{34}w_4 \right)\\
w_4 &\leftarrow \frac{1}{3}\left(a_{41}w_1 + a_{42}w_2 + a_{43}w_3 \qquad\quad \right) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

（例 2 終り）

[例 1]の(4)式と[例 2]の(7)式を比較すると、((4)式の各両辺に 4 を乗じ、(7)式の各両辺に 3 を乗じ、a_{ii}=1 に注意すれば)両者は同じ代入式であることがわかる。

［例 3］　N=4, S_k は図 2 の一対比較デザイングラフで与えられる。すなわち、S_1={1,2,4}, S_2={1,2,3}, S_3={2,3,4}, S_4={1,3,4} (但し、自分自身を含めない方式では S_1={2,4}, S_2={1,3}, S_3={2,4}, S_4={1,3}となるが結果は同じ)。

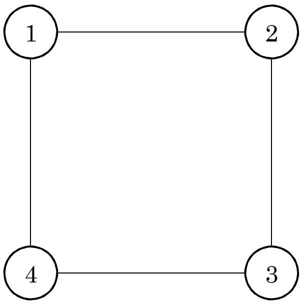

図 2: 例 3 の一対比較デザイングラフ

$$
\begin{aligned}
w_1 &\leftarrow \frac{1}{3}\left(a_{11}w_1 + a_{12}w_2 \qquad\quad + a_{14}w_4 \right)\\
w_2 &\leftarrow \frac{1}{3}\left(a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + a_{23}w_3 \qquad\quad \right)\\
w_3 &\leftarrow \frac{1}{3}\left(\qquad\quad a_{32}w_2 + a_{33}w_3 + a_{34}w_4 \right)\\
w_4 &\leftarrow \frac{1}{3}\left(a_{41}w_1 \qquad\quad + a_{43}w_3 + a_{44}w_4 \right) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

（例 3 終り）

(8)式の各両辺に 3 を乗じ、a_{ii}=1 に注意すると次式を得る。

$$
\begin{aligned}
3w_1 &\leftarrow 1w_1 + a_{12}w_2 + \qquad\quad a_{14}w_4\\
3w_2 &\leftarrow a_{21}w_1 + 1w_2 + a_{23}w_3\\
3w_3 &\leftarrow \qquad\quad a_{32}w_2 + 1w_3 + a_{34}w_4\\
3w_4 &\leftarrow a_{41}w_1 \qquad\quad + a_{43}w_3 + 1w_4 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

(9)式の k 番目の両辺に w_k(k=1,2,3,4)を相加すると、(10)式を得る。

$$
\begin{aligned}
4w_1 &\leftarrow 2w_1 + a_{12}w_2 + 0w_3 + a_{14}w_4\\
4w_2 &\leftarrow a_{21}w_1 + 2w_2 + a_{23}w_3 + 0w_4\\
4w_3 &\leftarrow 0w_1 + a_{32}w_2 + 2w_3 + a_{34}w_4\\
4w_4 &\leftarrow a_{41}w_1 + 0w_2 + a_{43}w_3 + 2w_4 \qquad (10)
\end{aligned}
$$

(10)式の各両辺を 4 で除すれば、この反復式は Harker 法の反復式に一致する。次節 3.3 で Harker 法の一般論を展開する。

3.3　不完全情報下の算術平均･評価平均モデルと Harker 法の等価性

不完全情報下では評価平均モデル式は一般的に(11)式で与えられる。

$$
w_k \leftarrow \frac{1}{|S_k|}\sum_{j\in S_k} a_{kj}w_j \qquad (k=1,2,\cdots,N) \qquad (11)
$$

両辺に$|S_k|$を乗じると、(12)式を得る。

$$
|S_k|w_k \leftarrow \sum_{j\in S_k} a_{kj}w_j \qquad (k=1,2,\cdots,N) \qquad (12)
$$

両辺に(N−$|S_k|$)w_k を相加すると、(13)式を得る。

$$
\mathrm{N}w_k \leftarrow \sum_{\substack{j\in S_k\\ j\neq k}} a_{kj}w_j + \left(\mathrm{N} - |S_k| + 1\right)w_k \qquad (13)
$$

ここで、(13)式の右辺に注目すると、N−$|S_k|$は N×N 一対比較行列 A の第 k 行の欠落要素数であり、不完全情報下の Harker 法の反復過程と同じである(厳密には、左辺を N 分の 1 すれば)。すなわち、Harker 法の加工行列を A^*とすれば、算術平均･評価平均モデル式に従えば、(14)式で、原形 Harker 法では(15)式で反復計算する。

$$
\boldsymbol{w} \leftarrow \frac{1}{\mathrm{N}}A^*\boldsymbol{w} \qquad (14)
$$

$$
\boldsymbol{w} \leftarrow A^*\boldsymbol{w} \qquad (15)
$$

4.　評価平均モデルの一般形

(1)式あるいは(2)式の一般的な平均操作を(16)式あるいは(17)式で記述する。

$$w_k \leftarrow \mathrm{G}\left(a_{kj}w_j \mid j \in \mathrm{S}_k\right) \tag{16}$$

$$w_k \leftarrow \mathrm{G}_k\left(a_{kj}w_j \mid j \in \mathrm{S}_k\right) \tag{17}$$

(17)式では、ウェイト w_k 毎に異なる平均操作をとりうる(例えば、w_1 は算術平均、w_2 は幾何平均、等々)。

以下に例 4，5，6，7，8 により一般形を説明する。但し、項目数 N の完全情報下で一般化平均を採用した場合については、文献[1,2]を参照のこと。

[例 4]　　N=4, S_k={1,2,3,4}(k=1,2,3,4),
$\mathrm{G}(a_{kj}w_j \mid j \in \mathrm{S}_k) = 2\text{-}\max_{j \in \mathrm{S}_k}\{a_{kj}w_j\}$.　　ここで“2-max”は2番目に大きな値をとる演算子である(細かくは、値に重複を許容する場合としない場合等に分かれる)。

$$\begin{aligned}
w_1 &\leftarrow 2\text{-}\max\left(a_{11}w_1, a_{12}w_2, a_{13}w_3, a_{14}w_4\right)\\
w_2 &\leftarrow 2\text{-}\max\left(a_{21}w_1, a_{22}w_2, a_{23}w_3, a_{24}w_4\right)\\
w_3 &\leftarrow 2\text{-}\max\left(a_{31}w_1, a_{32}w_2, a_{33}w_3, a_{34}w_4\right)\\
w_4 &\leftarrow 2\text{-}\max\left(a_{41}w_1, a_{42}w_2, a_{43}w_3, a_{44}w_4\right)
\end{aligned} \tag{18}$$

(例 4 終り)

2-max 以外にも、P-max,P-min,上位 q 名の平均，メディアン等の代表値など、一般化平均[1,2]では表現できない平均操作(あるいは代表値操作)を考慮できる。

[例 5]　　N=4, S_k は図 2 のデザイングラフ、
$\mathrm{G}(a_{kj}w_j \mid j \in \mathrm{S}_k) = \left(\prod_{j \in \mathrm{S}_k} a_{kj}w_j\right)^{\frac{1}{|\mathrm{S}_k|}}$(すなわち、行毎幾何平均)。

$$\begin{aligned}
w_1 &\leftarrow \left(a_{11}a_{12}a_{14}w_1w_2w_4\right)^{1/3}\\
w_2 &\leftarrow \left(a_{21}a_{22}a_{23}w_1w_2w_3\right)^{1/3}\\
w_3 &\leftarrow \left(a_{32}a_{33}a_{34}w_2w_3w_4\right)^{1/3}\\
w_4 &\leftarrow \left(a_{41}a_{43}a_{44}w_1w_3w_4\right)^{1/3}
\end{aligned} \tag{19}$$

(19)式の各両辺を 3 乗すると、(20)式を得る。

$$\begin{aligned}
w_1^3 &\leftarrow a_{11}a_{12}a_{14}w_1w_2w_4\\
w_2^3 &\leftarrow a_{21}a_{22}a_{23}w_1w_2w_3\\
w_3^3 &\leftarrow a_{32}a_{33}a_{34}w_2w_3w_4\\
w_4^3 &\leftarrow a_{41}a_{43}a_{44}w_1w_3w_4
\end{aligned} \tag{20}$$

(20)式の k 番目の両辺に w_k(k=1,2,3,4)を相乗すると、式(21)を得る。

$$\begin{aligned}
w_1^4 &\leftarrow a_{11}a_{12}a_{14}w_1^2w_2w_4\\
w_2^4 &\leftarrow a_{21}a_{22}a_{23}w_1w_2^2w_3\\
w_3^4 &\leftarrow a_{32}a_{33}a_{34}w_2w_3^2w_4\\
w_4^4 &\leftarrow a_{41}a_{43}a_{44}w_1w_3w_4^2
\end{aligned} \tag{21}$$

これを一般化すると、(13)式相当として(22)式を得る。

$$w_k^{\mathrm{N}} \leftarrow \prod_{\substack{j \in \mathrm{s}_k\\ j \neq k}} a_{kj}w_j \times\ a_{kk}w_k^{\mathrm{N}-|\mathrm{S}_k|+1} \tag{22}$$

すなわち、幾何平均版 Harker 法では、Harker 法の加工行列 A*の単純な行毎幾何平均ではなく、欠落要素を無視し、かつ対角要素の値 a_{kk} だけ w_k を$(\mathrm{N}-|\mathrm{S}_k|+1)$次べき乗し、N 乗根をとる反復過程となる。(例 5 終り)

[例 6]　　N=4, S_k は図 2 のデザイングラフ、
$\mathrm{G}(a_{kj}w_j \mid j \in \mathrm{S}_k) = \max_{j \in \mathrm{S}_k}\{a_{kj}w_j\}$　(すなわち、行毎最大値)。

$$\begin{aligned}
w_1 &\leftarrow \max\left\{a_{11}w_1, a_{12}w_2, a_{14}w_4\right\}\\
w_2 &\leftarrow \max\left\{a_{21}w_1, a_{22}w_2, a_{23}w_3\right\}\\
w_3 &\leftarrow \max\left\{a_{32}w_2, a_{33}w_3, a_{34}w_4\right\}\\
w_4 &\leftarrow \max\left\{a_{41}w_1, a_{43}w_3, a_{44}w_4\right\}
\end{aligned} \tag{23}$$

(例 6 終り)

[例 7]　　N=4, S_k は図 2 のデザイングラフ、
$\mathrm{G}(a_{kj}w_j \mid j \in \mathrm{S}_k) = \frac{1}{|\mathrm{S}_k|}\left(\sum_{j \in \mathrm{S}_k}\left(a_{kj}w_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$　(すなわち、行毎二乗平均)。

$$\begin{aligned}
w_1 &\leftarrow \frac{1}{3}\left(\left(a_{11}w_1\right)^2 + \left(a_{12}w_2\right)^2 + \left(a_{14}w_4\right)^2\right)^{1/2}\\
w_2 &\leftarrow \frac{1}{3}\left(\left(a_{21}w_1\right)^2 + \left(a_{22}w_2\right)^2 + \left(a_{23}w_3\right)^2\right)^{1/2}\\
w_3 &\leftarrow \frac{1}{3}\left(\left(a_{32}w_2\right)^2 + \left(a_{33}w_3\right)^2 + \left(a_{34}w_4\right)^2\right)^{1/2}\\
w_4 &\leftarrow \frac{1}{3}\left(\left(a_{41}w_1\right)^2 + \left(a_{43}w_3\right)^2 + \left(a_{44}w_4\right)^2\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{24}$$

一般化平均([1,2])においてパラメタ p=2 とした場合の不完全情報版である。(例 7 終り)

[例 8]　　N=5, S_k は図 3 のデザイングラフ、
$\mathrm{G}(a_{kj}w_j \mid j \in \mathrm{S}_k) = \frac{1}{|\mathrm{S}_k|}\sum_{j \in \mathrm{S}_k} a_{kj}w_j$ (すなわち、行毎算術平均)。
S_1={1,2,3,5}, S_2={1,2,3}, S_3={2,3,4}, S_4={1,3,5}, S_5={1,4}。

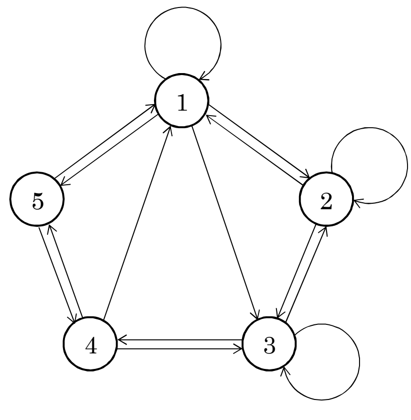

図 3: 例 8 の一対比較デザイングラフ

$$w_1 \leftarrow \frac{1}{4}(a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + a_{13}w_3 \qquad + a_{15}w_5)$$
$$w_2 \leftarrow \frac{1}{3}(a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + a_{23}w_3 \qquad \qquad)$$
$$w_3 \leftarrow \frac{1}{3}(\qquad a_{32}w_2 + a_{33}w_3 + a_{34}w_4 \qquad)$$
$$w_4 \leftarrow \frac{1}{3}(a_{41}w_1 \qquad + a_{43}w_3 \qquad + a_{45}w_5)$$
$$w_5 \leftarrow \frac{1}{2}(a_{51}w_1 \qquad \qquad + a_{54}w_4 \qquad) \qquad (25)$$

非対称な一対比較測定、対自己比較(selfloop)の非一貫性など算術平均での最も一般的なケースを考慮した。(例８終り)

5.　パス代数における固有ベクトル

線形代数におけるベクトル変数版連立１次方程式 A$\boldsymbol{x}$=$\boldsymbol{b}$ ならびに行列変数版連立１次方程式 AX=B をパス代数へ一般化すると、$\boldsymbol{x}$=A$\boldsymbol{x}$+$\boldsymbol{b}$ ならびに X=AX+B となる(例えば、文献[3])。これは、線形代数における逆行列 A^{-1} あるいは「方程式の解」のパス代数への拡張であり、概念的には $X=(I-A)^{-1}B$, $(I-A)^{-1}=\Sigma A^k$ によりネットワーク上でのパス(path)としての特性付けが可能である。さて、それでは線形代数における固有値・固有ベクトル問題「A$\boldsymbol{x}$=λ$\boldsymbol{x}$」はパス代数ではどのように一般化できるだろうか？本章では、評価平均モデルに基づく AHP 固有ベクトル法の反復過程(16)(あるいは(17))において、平均操作関数 G を２項演算子に限定すると、それがパス代数における固有ベクトル法と解釈できることを示す。

［例 9］　N=4 で完全情報のパス代数。

例１において $a_{ij}w_j$ を$(a_{ij}\otimes w_j)$、+を⊕とした反復式であり、平均のための 1/4 は除く。

$$w_1 \leftarrow (a_{11}\otimes w_1)\oplus(a_{12}\otimes w_2)\oplus(a_{13}\otimes w_3)\oplus(a_{14}\otimes w_4)$$
$$w_2 \leftarrow (a_{21}\otimes w_1)\oplus(a_{22}\otimes w_2)\oplus(a_{23}\otimes w_3)\oplus(a_{24}\otimes w_4)$$
$$w_3 \leftarrow (a_{31}\otimes w_1)\oplus(a_{32}\otimes w_2)\oplus(a_{33}\otimes w_3)\oplus(a_{34}\otimes w_4)$$
$$w_4 \leftarrow (a_{41}\otimes w_1)\oplus(a_{42}\otimes w_2)\oplus(a_{43}\otimes w_3)\oplus(a_{44}\otimes w_4) \qquad (26)$$

(例９終り)

(26)式をベクトル行列表現すれば一般的な反復式(27)ならびに等式(28)を得る。

$$\boldsymbol{w} \leftarrow \mathrm{A}\otimes\boldsymbol{w} \qquad (27)$$
$$\lambda\otimes\boldsymbol{w} = \mathrm{A}\otimes\boldsymbol{w} \qquad (28)$$

但し、(27),(28)での⊗はベクトル行列間の演算子である。等式(28)を N=3 について書き下すと、(29)となる。

$$\lambda\otimes w_1 = (a_{11}\otimes w_1)\oplus(a_{12}\otimes w_2)\oplus(a_{13}\otimes w_3)$$
$$\lambda\otimes w_2 = (a_{21}\otimes w_1)\oplus(a_{22}\otimes w_2)\oplus(a_{23}\otimes w_3)$$
$$\lambda\otimes w_3 = (a_{31}\otimes w_1)\oplus(a_{32}\otimes w_2)\oplus(a_{33}\otimes w_3) \qquad (29)$$

AHP で採用されている比率形一対比較では、項目 j を基準にした項目 k の相対比較値は「$a_{kj}w_j$」と推定できるので、(29)において直列演算子(あるいは一般化乗算)⊗は通常の乗算×となる。並列演算子(あるいは一般化和算)⊕としては、通常の和算、max 演算,min 演算などの２項演算が考えられる。通常の和算「$a\oplus b=a+b$」を採用すれば、通常の線形代数での固有値問題に帰着する。但し、$a\oplus b=(a+b)/2$ などの平均演算では、必ずしも分配律などが成立しないので、注意を要する。

6.　おわりに

比較対象となる集合からの各相対比較値の平均操作による各項目の相対評価が定まるという「評価平均モデル」を提案し、これに基づき Saaty 型の原形 AHP 固有ベクトル法、Harker 法などの既存の代表的な固有ベクトル法を再検討した。さらに、評価平均モデルに基づき、様々な新しい固有ベクトル法を考案した。又、評価平均モデルに基づき AHP 固有ベクトル法がパス代数における固有ベクトル概念と解釈できることを主張した。すなわち、評価平均モデルでの反復過程は、パス代数における固有ベクトルのパワー法(べき乗法)の具体例として見ることができる。

参考文献

［1］金成賢作、篠原正明：ＡＨＰ固有ベクトル法の一般化平均に基づく一般化(その１)、平成 21年度日本大学生産工学部第 42 回学術講演会・数理情報部会講演論文集、pp. 187-190(2009. 12).

［2］金成賢作、篠原正明：ＡＨＰ固有ベクトル法の一般化平均に基づく一般化(その 2)、平成 21年度日本大学生産工学部第 42 回学術講演会・数理情報部会講演論文集、pp. 191-194(2009. 12).

［3］篠原正明、篠原健：零元が定義できないパス代数系、平成 17 年度日本大学生産工学部第 38 学術講演会・数理情報部会講演論文集、pp. 73－74(2005. 12).