7-31

BCC モデルの入出力指向効率値の等値曲線

日大生産工（院）　○金成賢作
日大生産工　篠原正明

1. はじめに

CCR モデルでは、入力指向モデル効率値 θ と出力指向モデル効率値 η^{-1} が常に等しく「$\theta=\eta^{-1}$」が成立する。しかし、BCC モデルでは必ずしも「$\theta=\eta^{-1}$」は成立しない[1]。そこで、BCC モデルにおいて「$\theta=\eta^{-1}$」が成立する領域(これを等値曲線、あるいは等値領域と呼ぶ)を提案し、この等値曲線を境界として、「$\theta>\eta^{-1}$」と「$\theta<\eta^{-1}$」の領域に分割できることを１入力１出力 BCC モデルの場合について説明する。

2. 定式化

2.1 CCR モデルの定式化

評価ベクトル $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ が与えられ、かつ $\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{y}_j$ は DMU_j の入出力データベクトルとする。 DMU_j($j=1,\cdots,n$)の絶対効率値 A_j を(1)式で与える。

$$\mathrm{A}_j=\frac{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_j} \tag{1}$$

DMU_k の相対効率値 R_k を(2)式で与える。

$$\mathrm{R}_k=\frac{\mathrm{A}_k}{\max_j\{\mathrm{A}_j\}} \tag{2}$$

ある $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ が与えられた下での(2)式なので、正確には(3)式となる。

$$\mathrm{R}_k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\frac{\mathrm{A}_k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\max_j\{\mathrm{A}_j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\}} \tag{3}$$

DEA 効率値 $\max\mathrm{R}_k$(あるいは θ_k)は $\boldsymbol{u}\geqq\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}\geqq\boldsymbol{0}$ の制約下で $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ を変化させて(2)式あるいは(3)式の R_k を最大化した値である。

$$\theta_k=\max_{\boldsymbol{u}\geq\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{0}}\mathrm{R}_k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \tag{4}$$

(4)式の原形定式化を、分母を $\max_j\{\mathrm{A}_j\}=1$ と固定し、A_k を最大化と変形し、さらに、A_k の分母を $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k=1$ と固定し、$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_k$ を最大化と変形定式化するのが入力指向型 CCR モデルである。

一方､出力指向型 CCR モデルでは(3)式を以下の通りに変形する。

$$\mathrm{R}_k^{-1}=\frac{\mathrm{A}_k^{-1}}{\min_j\{\mathrm{A}_j^{-1}\}} \tag{5}$$

(5)式を $\boldsymbol{u}\geqq\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}\geqq\boldsymbol{0}$ の制約下で最小化した値を η_k とする。

$$\eta_k=\min_{\boldsymbol{u}\geq\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{0}}\mathrm{R}_k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^{-1} \tag{6}$$

(6)式の定式化を分母=1 と固定し、更に A_k^{-1} の分母を $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_k=1$ と固定し、$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k$ を最小化と変形定式化するのが出力指向型 CCR モデルである。

ところで、明らかに「$\theta_k=\eta_k^{-1}$」が常に成立しており、CCR モデルでは入力指向型も出力指向型も本質的には同じモデルであると考えられる。

2.2 BCC モデルの定式化

入力指向型 BCC モデルでは DMU_j の絶対効率値 A_j を(7)式で与える。

$$\mathrm{A}_j=\frac{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_j+u_{\mathrm{o}}y_{\mathrm{o}j}}{\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_j} \tag{7}$$

但し、$y_{\mathrm{o}j}=1$ なので、(8)式となる。

$$\mathrm{A}_j=\frac{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_j+u_{\mathrm{o}}}{\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_j} \tag{8}$$

ここで、u_{o} は負値もとりうる自由変数である。相対効率値 R_k を(9)で与え、入力指向型 BCC モデルの DEA 効率値 θ_k は(10)式で原形定式化できる。

$$\mathrm{R}_k=\frac{\mathrm{A}_k}{\max_j\{\mathrm{A}_j\}} \tag{9}$$

$$\theta_k=\max_{u_{\mathrm{o}},\boldsymbol{u}\geq\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{0}}\mathrm{R}_k(u_{\mathrm{o}},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \tag{10}$$

(10)式で分母=1 と固定し、さらに A_k の分母を $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k=1$ と固定し、$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_k+u_{\mathrm{o}}$ を最大化と変形定式化するのが入力指向型 BCC モデルである。

一方、出力指向指向型 BCC モデルでは、絶対効率値 A_j として(7)式ではなく、次式(11)を採用する。

Equality Holding Boundary Curve of Input/Output Oriented Efficiency Scores for BCC Model

Kensaku KANARI and Masaaki SHINOHARA

$$\mathrm{A}_j=\frac{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_j+v_{\mathrm{o}}x_{\mathrm{o}j}} \tag{11}$$

但し、x_{oj}=1 なので、(12)式となる。

$$\mathrm{A}_j=\frac{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_j+v_{\mathrm{o}}} \tag{12}$$

ここで、v_o は負値もとりうる自由変数である。相対効率値 R_k, DEA 効率値 η_k^{-1}に関しては CCR モデルと同様に以下で与える。

$$\mathrm{R}_k^{-1}=\frac{\mathrm{A}_k^{-1}}{\min_j\left\{\mathrm{A}_j^{-1}\right\}} \tag{13}$$

$$\eta_k=\min_{\boldsymbol{u}\geq\boldsymbol{0},v_{\mathrm{o}},\boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{0}}\mathrm{R}_k\left(\boldsymbol{u},v_{\mathrm{o}},\boldsymbol{v}\right)^{-1} \tag{14}$$

(14)式の定式化で分母=1 と固定し、更に $\mathrm{A_k}^{-1}$ の分母を $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_k$=1 と固定し、$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k+v_o$を最小化と変形定式化するのが出力指向型 BCC モデルである。

定理 1 最大化後の入力指向型 BCC モデルで u_o=0、出力指向型 BCC モデルで v_o=0 ならば、「$\theta=\eta^{-1}$」が成立する。

[証明] 各最適化後に $u_o=0,v_o=0$ ならば、最適化前に $u_o=0,v_o=0$ としても各最適値 θ と η は不変なので、CCR モデルと同様に $\theta=\eta^{-1}$ が成立する。 *Q.E.D.*

3. 1 入力 1 出力 BCC モデルの例

文献[1] (その 1)の表 1 に示す 1 入力 1 出力データを例に、「$\theta=\eta^{-1}$」が成立する等値境界域を求める。

図 1 に 1 入力 1 出力データをプロットした入出力関係を示す。DMU␣C では $\theta=\eta^{-1}$=1.0(かつ $u_o=0,v_o=0$)が成立しており、従って DMU␣C は等値境界域に含まれる。DMU␣C 以外では B,E,K でも $\theta=\eta^{-1}$ であるが、これらの DMU はフロンティア上の効率的 DMU ゆえに、$\theta=\eta^{-1}$=1.0 となる($u_o=v_o=0$ ではない)。 図 1 において等値境界域は C から右下方向へ伸びると予測される。

(ⅰ) $x\geqq12$, $y\leqq3$ の領域に注目して、等値境界域が満足する方程式を作る。

$$x_1=4\,,\,x_2=x-4 \tag{15}$$

$$y_1=y\,,\,y_2=10-y \tag{16}$$

等値条件「$x_1y_2=x_2y_1$」より、(17)を得る。

$$xy=40 \tag{17}$$

(17)式の曲線を「$x\geqq12$, $y\leqq3$」の範囲に破線でプロットした。又、(15),(16)の x_1,x_2,y_1,y_2 は図 2 の入出力関係における各部分の長さである。

(ⅱ) $7\leqq x\leqq12,3\leqq y\leqq6$ の領域に注目する。なお、(ⅰ)において等値境界線は x=13.33,y=3 を含むので、上記の領域に注目した。

$$x_1=\frac{1}{3}y+3\,,\,x_2=x-\left(\frac{1}{3}y+3\right) \tag{18}$$

$$y_1=y\,,\,y_2=\left(\frac{2}{5}x+\frac{26}{5}\right)-y \tag{19}$$

同様に等値条件「$x_1y_2=x_2y_1$」より、(20)を得る。

$$\left(x-2\right)\left(y-\frac{18}{13}\right)=\frac{270}{13} \tag{20}$$

(20)式の曲線を「$7\leqq x\leqq12,3\leqq y\leqq6$」の範囲に破線でプロットした。

(ⅲ) $x\geqq12,3\leqq y\leqq6$ の領域に注目する。この領域は、(ⅰ)と(ⅱ)の中間に位置する。

$$x_1=\frac{1}{3}y+3\,,\,x_2=x-\left(\frac{1}{3}y+3\right) \tag{21}$$

$$y_1=y\,,\,y_2=10-y \tag{22}$$

等値条件「$x_1y_2=x_2y_1$」より(23)を得る。

$$\left(x-\frac{10}{3}\right)y=30 \tag{23}$$

(23)式の曲線を「$x\geqq12,3\leqq y\leqq6$」の範囲に破線でプロットした。

(ⅳ) $x\leqq7,3\leqq y\leqq6$ の領域に注目する。この領域は(ⅱ)と DMU␣C の中間に位置する。

$$x_1=\frac{1}{3}y+3\,,\,x_2=x-\left(\frac{1}{3}y+3\right) \tag{24}$$

$$y_1=y\,,\,y_2=\left(x+1\right)-y \tag{25}$$

等値条件「$x_1y_2=x_2y_1$」より(26)を得る。

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{9}{2}\right)=\frac{27}{4} \tag{26}$$

[考察 I] 領域(ⅰ)の(17)式、(ⅱ)の(20)式、(ⅲ)の(23)式、(ⅳ)の(26)式、いずれも等値曲線は直角双曲線「XY=A」で表現できる。以下に各領域の境界において、曲線が一致する、すなわち、連続であることを確認する。

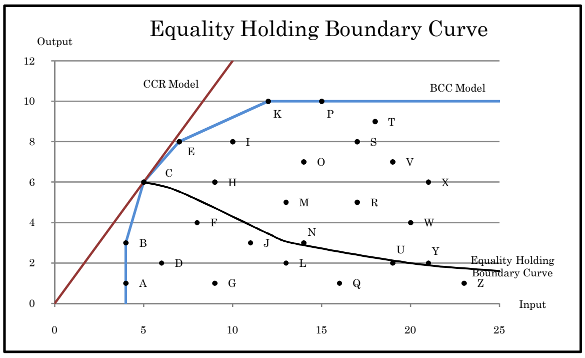

図 1: 1 入力 1 出力データの入出力関係([1](その 1)の表 1)

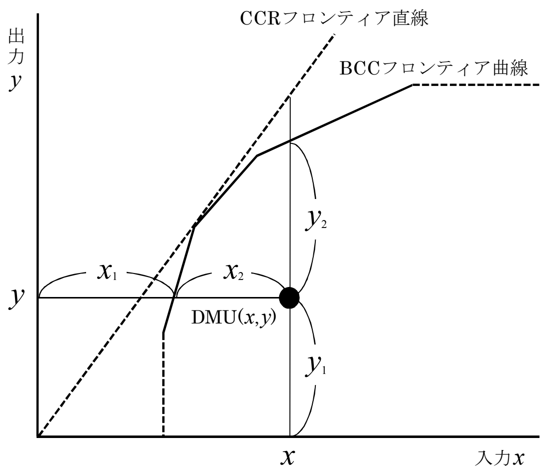

図 2: BCC モデルにおける入出力関係

- 領域(ⅳ)「$x≦7,3≦y≦6$」

  DMU C (x=5, y=6)は(26)を満足する。よって、DMU C は等値曲線に含まれる。

  x=7 とすると(26)より、y=5 (27)

- 領域(ⅱ)「7≦x≦12,3≦y≦6」

  x=7 とすると(20)より、$y=5\,\dfrac{7}{13}$ (28)

  (27)と一致し、よって、領域(ⅳ)との境界で等値曲線は一致する。

  x=12 とすると(20)より、$y=3\,\dfrac{6}{13}$ (29)

- 領域(ⅲ) 「x≧12,3≦y≦6」

  x=12 とすると(23)より、$y=3\,\dfrac{6}{13}$ (30)

  (29)と一致し、よって、領域(ⅱ)との境界で等値曲線は一致する。

  y=3 とすると(23)より、$x=13\,\dfrac{1}{3}$ (31)

- 領域(ⅰ) 「x≧12,y≦3」

  y=3 とすると(17)より、$x=13\,\dfrac{1}{3}$ (32)

  (31)と一致し、よって、領域(ⅲ)との境界で等値曲線は一致する。

[考察Ⅱ] 文献[1] (その 1)の表 1 より、等値曲線より右上の領域の DMU については「$\theta<\eta^{-1}$」、すなわち、

$$\theta\eta<1 \tag{33}$$

が成立し、等値曲線より左下の領域の DMU については「$\theta>\eta^{-1}$」、すなわち、

$$\theta\eta>1 \tag{34}$$

が成立する。又、図 1 において DMU N,U,Y など、等値曲線の近くに位置する DMU については、文献[1] (その 1)の表 1 より、「$\theta \fallingdotseq \eta^{-1}$」が成立していることが分かる。又、一般に次の定理 2 が 1 入力 1 出力モデルでは成立する。

定理 2 完全飽和域に属する DMU(x,y)の $\theta\eta$ 積(=z_1)と、微少増分 $\varDelta x$>0 の DMU($x+\varDelta x,y$)に対する $\theta\eta$ 積(=z_2)との間に、

$$z_1>z_2 \tag{35}$$

が成立する。

[証明] $z_1=\theta_1\eta_1, z_2=\theta_2\eta_2$ とする。$\theta_1=\dfrac{x_1}{x_1+x_2}, \eta=\dfrac{y_1}{y_1+y_2}$ であり、微少増分なので、各矩形領域から出ないので、θ_2 と η_2 は以下で与えられる。

$$\theta_2=\frac{x_1}{x_1+x_2+\varDelta x} \tag{36}$$

$$\eta_2^{-1}=\frac{y_1}{y_1+y_2} \tag{37}$$

よって、$\theta_1\eta_1>\theta_2\eta_2$ (38) が成立する。 *Q.E.D.*

ここで、完全飽和域とは、図 3 における領域「す、さ、く、え」であり、同様に、完全立ち上がり域「あ、い、う、え」では、出力方向の微小変化$-\varDelta y(\varDelta y>0)$に対して同様の関係式が成立する。

4. 1 入力 1 出力 BCC モデルでの一般論

図 3 に 1 入力 1 出力 BCC モデルでの区分線形フロンティア曲線に包含された PPS(生産可能集合)ならびに PPS の領域分割(フロンティア曲線の区分線形区間に対応して「あ」～「す」の 13 分割)を示す。

領域「き」に属する DMU(x, y)に注目する。領域「き」に水平方向で対応するフロンティア曲線の線分を (α,β)、垂直方向で対応するフロンティア曲線の線分を(γ,δ)とする。線分(α,β)は直線方程式 $x=f(y)=ay+b$ (39),線分(γ,δ)は直線方程式 $y=g(x)=cx+d$ (40)、と表現できる。

$$x_1=f(y),\ x_2=x-x_1=x-f(y) \tag{41}$$

$$y_1=y,\ y_2=g(x)-y_1=g(x)-y \tag{42}$$

ところで、入力指向 DEA 効率値を θ、出力指向 DEA 効率値を η^{-1} とするならば、次式(43),(44)が成立する。

$$\theta = \frac{x_1}{x_1 + x_2} \tag{43}$$

$$\eta^{-1} = \frac{y_1}{y_1 + y_2} \tag{44}$$

等値条件「θ=η^{-1}」より、(45)を得る。

$$x_1 y_2 = x_2 y_1 \tag{45}$$

(41),(42)を(45)に代入すると(46)を得る。

$$g(x)f(y) = xy \tag{46}$$

(39),(40)より直交双曲線(47)を得る。

$$\left(x - \frac{ad}{1-ac}\right)\left(y - \frac{bc}{1-ac}\right) = \frac{bd}{(1-ac)^2} \tag{47}$$

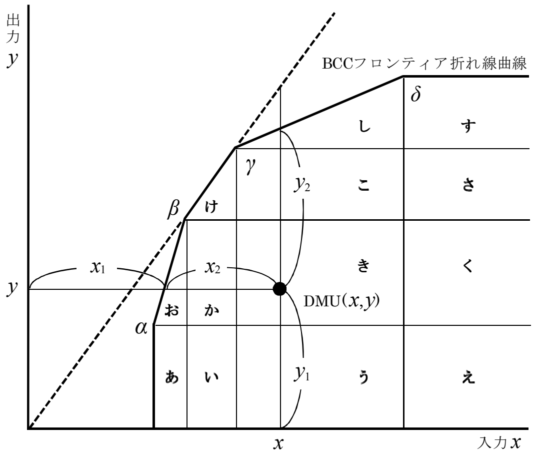

図 3: 1 入力 1 出力 BCC モデルにおける入出力関係と PPS 領域分割

フロンティア曲線上の区分線形区間の線分と接する三角形領域(図 3 の「お」,「け」,「し」)においては ac =1 となり、分母の 1- ac =0 となり(47)は不成立だが、CCR フロンティア直線を共有する線分(図 3 では線分(β,γ))に接する三角形領域(図 3 の「け」)では $b=d=0$ となり、注目する三角形領域全域で等値条件(45)が成立する。フロンティア曲線に接する三角形領域では、一般に(飽和域、未飽和域に限らず)、$bc=-d$　(48)が成立する。これを等値条件(46)式に代入すると(49)を得る。

$$x = ay + b \tag{49}$$

すなわち、フロンティア曲線に接する三角形領域では、区分線形な<u>フロンティア曲線上</u>では(49)が成立するので、「θ=η^{-1} (=1.0)」が成立する。次に、フロンティア線分以外の各三角形の内部ではどのような関係が成立するかを検討する。飽和域の三角形領域(例えば、図 3 の「し」)の内部では、一般に(50)が成立する(但し、$b<0$)。

$$\frac{x_1 - b}{x_1 + x_2 - b} = \frac{y_1}{y_1 + y_2} = \eta^{-1} \tag{50}$$

両辺に $\theta^{-1}=(x_1+x_2)/x_1$ を乗じると(51)を得る。

$$\theta^{-1}\eta^{-1} = \frac{1+|b|/x_1}{1+|b|/(x_1+x_2)} > 1 \tag{51}$$

但し、$x_1>0, x_2>0$ とする。すなわち、飽和域のフロンティアに接する三角形内部の DMU については

「$\theta<\eta^{-1}$」(52)が一般に成立する。

(入力指向 DEA 効率値 θ) < (出力指向 DEA 効率値 η^{-1}) (52)

非飽和域(あるいは発展途上域)の三角形領域(例えば、図 3 の「お」)の内部では、一般に(53)が成立する(但し、$d<0$)。

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2} = \frac{y_1 - d}{y_1 + y_2 - d} \tag{53}$$

同様にして、非飽和域のフロンティアに接する三角形内部の DMU については「$\theta>\eta^{-1}$」(54)が一般に成立する。

(入力指向 DEA 効率値 θ) > (出力指向 DEA 効率値 η^{-1}) (54)

最後に、BCC フロンティア曲線の垂直線分と水平線に対応する矩形領域「え」内の DMU(x, y)について検討する。水直線の x 切片を x_0、水平線の y 切片を y_0 とすると、$g(x)=y_0$, $f(y)=x_0$ なので、等値曲線は(55)で与えられる。

$$xy = x_0 y_0 \tag{55}$$

すなわち、入力データ x と出力データ y が反比例関数にあり、x 軸と y 軸を漸近線に持つ基本的な直角双曲線となる。

5. おわりに

1 入力 1 出力 BCC モデルの場合について、入力指向 DEA 効率値 θ と出力指向 DEA 効率値 η^{-1} の関係について、例題を通して検討し、一般論を展開した。BCC フロンティア面が CCR フロンティア面と接する領域から、PPS 内部へ区分的に直角双曲線の θ=η^{-1} が成立する等値曲線が伸び、内部に行くほど θ=η^{-1} の値は低下する。一方、BCC フロンティア面上では θ=η^{-1}= 1.0 が成立しており、フロンティア面とこの等値面により「$\theta<\eta^{-1}$」と「$\theta>\eta^{-1}$」の領域に分割されることを示した。1 入力 1 出力の場合以外についての議論の一般化等が今後の課題である。

参考文献

[1] 金成賢作、篠原正明：DEA における入力指向と出力指向入力の比較（その 1）、(その２)、第 42 回日本大学生産工学部・学術講演会・数理情報,pp169-178(2009.12.5).