

積型 DEA について

日大生産工(院) ○藤沢 雅之

日大生産工

大澤 慶吉

日大生産工

篠原 正明

1. はじめに

入力データ x , 入力項目評価ウェイト v に対して
仮想入力値は, 通常, ウェイト v による重み付き

和 ($v^T x = \sum v_i x_i$) を採用する。本論文では, 重

み付き積 ($\prod x_i^{v_i}$) を仮想入力値として採用する

アプローチ(仮想出力値も同様)を考察し, その妥当
性を検討する。

2. 算術平均, 幾何平均と一般化平均

データ集合 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, ウェイトベ
クトル $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ に対して, p 次一般
化平均 $G(x, v, p)$ を(1)式で定義する。

$$G(x, v, p) = \left(\sum_{i=1}^n v_i x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

$p = 1$ で算術平均, $p \rightarrow 0$ で幾何平均に帰着す
る。

$$G(x, v, 1) = \sum v_i x_i = v^T x \quad (2)$$

$$G(x, v, 0) = \prod x_i^{v_i} \quad (3)$$

但し, 通常は $x > 0, v \geq 0$ 等を仮定する。

伝統的にはデータ x をウェイト v で重み付けした
値としては, 算術平均値 $G(x, v, 1) = v^T x$ を採用する。
しかしながら, 重み付け和の値として, 算術平均
を採用する必然性は特に無いと思われる。

文献[1]より, 重み和 $\sum v_i = m$ が 1 の時は, どの
ような平均法をとろうが大差はないことが示され
ており, さらに重み和 $m \neq 1$ でも $p = 1$ の算術平
均値の定数倍(m の関数)となるので($p = 0$ の場
合を除いて), 効率値として比率尺度を用いる限り

は, 伝統的な算術平均 $G(x, v, 1) = v^T x$ の値と大差は
無いことが予想される。

3. 積型 DEA の定式化

まず DMU_k に注目して, 伝統的な仮想入出力
値和型 DEA の原型定式化について復習する。

$$\text{仮想入力値: } VI_k = v^T x_k \quad (4)$$

$$\text{仮想出力値: } VO_k = u^T y_k \quad (5)$$

$$\text{絶対効率値: } A_k = VO_k / VI_k \quad (6)$$

$$\text{相対効率値: } R_k = A_k / \max_r A_r \quad (7)$$

$$\text{最大効率値: } MR_k = \max_{u, v} R_k \quad (8)$$

次に積型 DEA の原型定式化を以下に示す。

$$\text{仮想入力値: } VI_k = \prod x_{ik}^{v_i} (= G(x_k, v, 0)) \quad (9)$$

$$\text{仮想出力値: } VO_k = \prod y_{jk}^{u_j} (= G(y_k, u, 0)) \quad (10)$$

以降の定義は和型と同じである。

$$\text{絶対効率値: } A_k = VO_k / VI_k \quad (11)$$

$$\text{相対効率値: } R_k = A_k / \max_r A_r \quad (12)$$

$$\text{最大効率値: } MR_k = \max_{u, v} R_k \quad (13)$$

さて, 伝統的な和型 DEA 定式化(4)~(8)は, 分数計
画定式化を経て, 最終的に以下の LP 定式化
(14)~(16)に変形帰着する。

$$\text{目的関数: } VO_k = u^T y_k \rightarrow \text{最大化} \quad (14)$$

$$\text{制約条件: } VO_k = v^t x_k = 1 \quad (15)$$

$$VO_r \leq VI_r \text{ あるいは } u^t y_r \leq v^t x_r \quad r = (1, \dots, n) \quad (16)$$

さらに, 変数ベクトル u と v に非負条件(17)を課す事により, ネガティブ評価を排除する。

$$u \geq 0, v \geq 0 \quad (17)$$

積型 DEA についても変形定式化が可能であり, 以下に 3 つの変形定式化を示す。

[積型 DEA の基本変形定式化(その 1)]

和型 DEA の LP 定式(14)~(16)と同様な手順により以下(18)~(20)を得る。

$$\text{目的関数: } VO_k = \prod y_{jk}^{u_j} \rightarrow \text{最大化} \quad (18)$$

$$\text{制約条件: } VI_k = \prod x_{ik}^{v_i} = 1 \quad (19)$$

$$VO_r \leq VI_r \text{ あるいは } \prod y_{jr}^{u_j} \leq \prod x_{ir}^{v_i} \quad (20)$$

ここで, (18)~(20)の対数 $\log$ をとり, $X = \log x$, $Y = \log y$ と入出力データの対数をとることにより, 以下の LP 定式化を得る。

$$\text{目的関数 } \log VO_k = u^t Y_k \rightarrow \text{最大化} \quad (21)$$

$$\text{制約条件: } \log VI_k = v^t X_k = 0 \quad (22)$$

$$\log VO_r \leq \log VI_r \text{ あるいは } u^t Y_r \leq v^t X_r \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (23)$$

[積型 DEA の幾何平均定式化]

$$\text{目的関数: } R_k = \frac{A_k}{\max_r \{A_r\}} \rightarrow \text{最大化} \quad (24)$$

$$\text{制約条件: } u^t 1 = 1, v^t 1 = 1 \quad (25)$$

$$u \geq 0, v \geq 0 \quad (26)$$

(25)より幾何平均での重み和 $m = 1$ となるので, 伝統的な和型 DEA と VO_k, VI_k, A_k, R_k の値が大差無い結果が予想できるので, さらに目的

関数 R_k の分母=1 として, 分子を最大化する事により, 最終的に以下の定式(27)~(30)を得る。

$$\text{目的関数: } A_k = VO_k / VI_k \rightarrow \text{最大化} \quad (27)$$

$$\text{制約条件: } VO_r \leq VI_r \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (28)$$

$$u^t 1 = 1, v^t 1 = 1 \quad (29)$$

$$u \geq 0, v \geq 0 \quad (30)$$

ここで, (27), (28)は以下の通りである。

$$A_k = \prod y_{jk}^{u_j} / \prod x_{ik}^{v_i} \rightarrow \text{最大化} \quad (31)$$

$$\prod y_{jr}^{u_j} \leq \prod x_{ir}^{v_i} \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (32)$$

(31), (32)の対数をとれば, (33), (34)となる。

$$\log A_k = \sum u_j \log y_{jk} - \sum v_i \log x_{ik} \rightarrow \text{最大化} \quad (33)$$

$$\sum u_j \log y_{jk} \leq \sum v_i \log x_{ir} \quad (34)$$

すなわち, 重み和 $m=1$ 幾何平均定式化(27)~(30)は LP 問題に帰着した。

[積型 DEA の基本変形定式化(その 2)]

基本変形定式化(その 1)では, 目的関数

$A_k = VO_k / VI_k$ において, 「分母=1, 分子→最大化」と変形したが, 入出力仮想値が和型ではなく積型で与えられるので, この変形をしないと, 以下の定式化を得る。

$$\text{目的関数: } A_k = VO_k / VI_k \rightarrow \text{最大化} \quad (35)$$

$$\text{制約条件: } VO_r \leq VI_r \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (36)$$

(35), (36)の両辺の対数をとると以下の LP 定式化を得る。

$$\text{目的関数: } \log A_k = u^t Y_k - v^t X_k \rightarrow \text{最大化} \quad (37)$$

$$\text{制約条件: } u^t Y_r \leq v^t X_r \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (38)$$

さらに, (17)式と同様に, 変数ベクトル u, v に非負条件を課すことによりネガティブ評価を排除する。

$$u \geq 0, v \geq 0 \quad (39)$$

4. 数値計算例

伝統的な和型 DEA の原型定式化(8), 提案する

積型 DEA の原型定式化(13), 積型 DEA の幾何平均定式化(24)~(26), の以上 3 つの定式化について, 離散評点法に基づく効率値計算例を以下に説明する。本来の定式化は, 連続評点法に基づいているが, 連続評点法だと評価値が 0 になったり $+\infty$ になったりで, 極端な値をとる可能性が排除できない(その対策の 1 つが信頼領域法であるが, 連続評点法を使う限り同様の問題は残る)。そこで, 評価値の取りうる値を離散的な値に限定する「離散評点法」を 3 つの定式化に適用する事により, 各定式化の実現可能性を検討する(フィジビリティスタディ)。

[例 1] 2 入力 2 出力 4 DMU の基本例(原データ) 入出力データを表 1 に示す。

表 1: 例 1 の入出力データ表

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4
入力 1	1	1	0.5	1
入力 2	1	0.5	1	1
出力 1	1	0.9	1	2
出力 2	1	0.8	1	2

離散評点法は 2 段階とし, 第 1 段階評点 $S_1 = 1$, 第 2 段階評点 $S_2 = 2$ とする。表 2 に 3 つの定式化に基づく DEA 効率値を示す。

表 2: 例 1 の DEA 効率値

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4
定式化 1 (和型)	0.5	0.65	0.75	1
定式化 2 (積型)	0.25	0.72	1	1
定式化 3 (幾型)	0.5	0.687	0.7937	1

但し, 「幾型」=幾何平均型。

[考察 1]

DEA 効率値の大雑把な多少関係は, 定式化に依存せず同じである。

[考察 2]

積型では仮想入出力値が, べき乗(x^v あるいは y^u)で計算されるので, 値が敏感となり, 和型の効率値と比較して, より大きいかより小さくなる傾向となる。

[考察 3]

幾何平均型では, 和型とほぼ同傾向の効率値が得られた。
3 章でも述べたが, 重み u, v を総和が 1 と正規化する事により, 「算術平均 $\rightleftharpoons$ 幾何平均」の性質が反映されたと考えられる。
次に, 表 1 のデータを各入出項目ごとに総和が 1 に正規化した例を検討する。

[例 2]

2 入力 2 出力 4 DMU の基本例(正規化データ)

表 3: 例 2 の入出力データ表

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4
入力 1	0.2857	0.2857	0.1429	0.2857
入力 2	0.2857	0.1429	0.2857	0.2857
出力 1	0.2041	0.1837	0.2041	0.4082
出力 2	0.2083	0.1667	0.2083	0.4167

表 4: 例 2 の DEA 効率値

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4
定式化 1 (和型)	0.5	0.6496	0.75	1
定式化 2 (積型)	0.25	0.72	1	1
定式化 3 (幾型)	0.5	0.687	0.794	1

[考察 4]

和型 DEA の連続評点法では, 連続性故に評価値に定数倍の自由度が存在するので, データが定数倍されても同じ効率値結果となる。

しかし, 和型 DEA の離散評点法では, 現データと正規化データでは効率値結果は一般に差異が生じる。

表 2 の定式化 1 と表 4 の定式化 1 の DEA 効率値を比較すると, ほとんど同じである。

これは, 表 1 において「入力 1 データの総和=3.5 = 入力 2 データの総和」, 「出力 1 データの総和=4.9 $\div$ 4.8=出力 2 データの総和」, が成り立つためであり, もし, 完全に「出力 1 データの総和=出力 2 データの総和」が成立すれば, 表 2 と表 4 の定式化 1 の効率値は完全に一致する。

[考察 5]

表 2 と表 4 の定式化 2, 3 の効率値は一般に同じである。積型 DEA では, 原データと正規化データに対して同じ DEA 効率値となる。さらに, 正規化法も各入出力項目毎に許容される(すなわち, 測定単位に影響を受けない)。

[例 3] 2 入力 2 出力 4 DMU の DMU2 変形例(原データ)

表 1 において DMU2 の入出力データを全て 10 倍した入出力データ表を考える(表 5)。

DMU の入出力規模が一律に 10 倍増大した場合である。

表 5: 例 3 の入出力データ表

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4
入力 1	1	10	0.5	1
入力 2	1	5	1	1
出力 1	1	9	1	2
出力 2	1	8	1	2

表 6: 例 3 の DEA 効率値

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4
定式化 1 (和型)	0.5	0.65	0.75	1
定式化 2 (積型)	0.25	1	1	1
定式化 3 (幾型)	0.5	0.687	0.7937	1

[考察 6]

表 2 と表 6 の DEA 効率値を比較すると, 定式化 1(和型)と定式化 3(幾何平均型)が一致している。本論文では, 比率形(ratio form)の効率値 R を考えているので, 入出力仮想値が和型ならば(定式化 1), 特定 DMU の入出力データが一律に定数倍されても効率値結果は変わらない。同様に幾何平均型(定式 3)でも, 定数倍の寄与分が効率値の分母と分子で同

じとなり、効率値結果は変わらない。一方、定式化 2(積型)では、10 倍した DMU2 の絶対効率値が大きくなる評価ケースが増え、その結果として表 6 では DMU2 の DEA 効率値も 1 となる。

[例 4]2 入力 2 出力 4DMU の DMU2 変形例(正規化データ)

表 7:例 4 の入出力データ表

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4
入力 1	0.08	0.8	0.04	0.08
入力 2	0.125	0.625	0.125	0.125
出力 1	0.0769	0.6923	0.0769	0.1238
出力 2	0.0833	0.6667	0.0833	0.1667

表 8:例 4 の DEA 効率値

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4
定式化 1 (和型)	0.5	0.691	0.6951	1
定式化 2 (積型)	0.25	1	1	1
定式化 3 (幾型)	0.5	0.6868	0.7937	1

[考察 7]

表 6 と表 8 の定式化 1 の DEA 効率値を比較して、一般に、離散評点・和型 DEA は、入出力データを正規化すると、DEA 効率値が異なる点を確認できる。

ちなみに、表 6 での行和は 12.5, 8, 13, 12 である。

[考察 8]

表 6 と表 8 の定式化 2 と 3 の DEA 効率値を比較して、一般に、離散評点・積型 DEA では、入出力データを正規化しても、DEA 効率値は同じである点を確認できる。

[例 5]2 入力 2 出力 4DMU の出力 1 変形例(原データ)

表 1 において、出力 1 のデータを全て 10 倍した入出力データ表を考える(表 9)。出力 1 のデータの測定単位が一律に変化した場合(例えば cm から mm へ)である。

表 9:例 5 の入出力データ表

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4
入力 1	1	1	0.5	1
入力 2	1	0.5	1	1
出力 1	10	9	10	20
出力 2	1	0.8	1	2

表 10:例 5 の DEA 効率値

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4
定式化 1 (和型)	0.5	0.671	0.75	1
定式化 2 (積型)	0.25	0.72	1	1
定式化 3 (幾型)	0.5	0.687	0.794	1

[考察 9]

表 2 と表 10 の定式化 1 の DEA 効率値データを比較すると、両者は異なる点を確認できる。連続評点法ならば、データの単位に依存しないので、両データは一致するはずであるが、離散評点法では、一般に異なる。

[考察 10]

表 2 と表 10 の定式化 2 と 3 の DEA 効率値データを比較すると、両者は同じである。すなわち、積型 DEA では単位に依存しないで DEA 効率値を計算できる。

[例 6]2 入力 2 出力 4DMU の出力 1 変形例(正規化データ)

表 11:例 6 の入出力データ表

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4
入力 1	0.2857	0.2857	0.1429	0.2857
入力 2	0.2857	0.1429	0.2857	0.2857
出力 1	0.2041	0.1837	0.2041	0.4082
出力 2	0.2083	0.1667	0.2083	0.4167

表 12:例 6 の DEA 効率値

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4
定式化 1 (和型)	0.5	0.6496	0.75	1
定式化 2 (積型)	0.25	0.72	1	1
定式化 3 (幾型)	0.5	0.687	0.794	1

[考察 11]

表 11 は表 3 と同じであり、従って結果(表 12)も表 4 と同じである。表 9 で出力 1 の入出力データを 10 倍しても、行毎に正規化すれば同じ入出力データとなる。

5. おわりに

比率形効率値に基づき、仮想入力値、仮想出力値を積型関数で定義する積型 DEA を考察し、その基本定式化並びに 3 種類の変形式定式化を与えた。離散評点法を用いた数値計算例により、積型 DEA の効率値特性を調べた。積型 DEA では離散評点法を用いても、入出力データの正規化に依存せず(すなわち、測定単位に影響を受けずに)、同一の DEA 効率値が計算できる点などが判明した。連続評点法を用いた積型 DEA の数値計算は今後の課題である。

参考文献

[1] 篠原正明、篠原健：重み和が必ずしも 1 でない一般化平均法、第 42 回日本大学生産工学部・学術講演会・数理情報部会、pp145-148, 2009.12.5