7-29

生産効率性ゲームの超効率性 DEA モデル

日大生産工　　○篠原 正明
情報システム研究所　篠原 健

1. はじめに

生産システムにおける効率性ゲーム(〔1〕)に対して，超効率(super-efficiency)を測定する DEA モデルに基づく解釈を提案する。

多品種最大フロー問題も一種の生産システムの生産計画問題とみなせるが，「多品種最大フロー=多品種最小カット」定理(〔2〕)に基づき，これを生産効率性ゲームに適用することにより，超効率性 DEA モデルとして解釈を与える。

2. 準備

生産効率性ゲーム，多品種最大フロー＝最小カット定理，超効率性 DEA モデルについて説明する。

2.1 生産効率性ゲーム(〔1〕)

生産計画問題:

$$\left.\begin{array}{l} Z=c^{T}x\rightarrow\max \\ Ax\leqq b \\ x\geqq 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

資源評価問題:

$$\left.\begin{array}{l} W=b^{T}y\rightarrow\min \\ A^{T}y\geqq c \\ y\geqq 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

$A=\{a_{ij}\}$は製品の資源使用量行列，$b=\{b_i\}$は資源量(列)ベクトル，$c=\{c_j\}$は製品収益(列)ベクトルである。(1)において，$s=\{s_j\}$，$c_jx_j=s_j$，$B=\{b_{ij}\}$，$b_{ij}=a_{ij}/c_j$とすると，(3)を得る。

収益最大化生産計画問題：

$$\left.\begin{array}{l} Z=1^{T}s\rightarrow\max \\ Bs\leqq b \\ s\geqq 0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

但し，$c\geqq 0$ を仮定する。又，(3)において，s_j は製品 j の収益額，b_{ij} は製品 j の収益 1 単位を生み出すために必要な資源 i の使用量である。

2.2 多品種最大フロー=最小カット定理(〔2〕)

多品種最大フロー問題のパス型定式化：

$$\left.\begin{array}{l} f=1^{T}x\rightarrow\max \\ Px\leqq c \\ x\geqq 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

ここで，$x=\{x_j\}$はパスフローベクトルで，x_j はパス j のフロー量，$P=\{p_{ij}\}$は枝－パス接続行列で，p_{ij} はパス j が枝 i を含む時 1 で，それ以外は 0，$c=\{c_i\}$は枝容量ベクトルで，c_i は枝 i の容量値である。

多品種最大フロー=最小カット定理

$$f_{\max}=\min_{v\geq 0}\frac{v^{T}c}{\min_{j}\left\{v^{T}Pj\right\}} \quad (5)$$

ここで，$v=\{v_i\}$は枝評価ベクトルで，v_i は枝 i のウェイト，P_j はパス j の枝接続(列)ベクトルで，$P=\{P_1, P_2, \cdots, P_j, \cdots, P_N\}$である。

2.3 超効率性 DEA モデル

DMU_k の超効率性 DEA・入力指向型 CCR モデル定式化：

$$\theta=\max_{u,v\geq 0}\frac{\dfrac{u^{T}y_k}{v^{T}x_k}}{\max_{j\neq k}\left\{\dfrac{u^{T}y_j}{v^{T}x_j}\right\}} \quad (6)$$

DMU_k の超効率性 DEA・出力指向型 CCR モデ

Super Efficiency DEA Model for Production Efficiency Game and Multi-commodity Flow Problem

Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

ル定式化：

$$\eta = \min_{u,v\geq 0} \frac{\dfrac{v^T x_k}{u^T y_k}}{\min\limits_{j\neq k}\left\{\dfrac{v^T x_j}{u^T y_j}\right\}} \qquad (7)$$

ここで，x_j，y_jはDMU_jの入力データ，出力データ列ベクトル，u，v は入力項目，出力項目のウェイト列ベクトルである。(6)においては右辺分母の max で j≠k と DMU_kを除外し，(7)においては右辺分母の min で j≠k と DMU_kを除外している点が，超効率性 DEA モデルの定式化の特徴である。又，CCR モデルでは，$\theta = \eta^{-1}$が成立する。

3. 多品種最大フロー問題の超効率性DEAモデル

(5)と(7)を比較し，拡大パス行列 P'={P_1, P_2, …, P_N, c}を既存のパス行列 P に枝容量ベクトル c を付与して定義する。

(7)において，y_j=1 とし，$u^T y_j$=1 より(8)となる。

$$\eta = \min_{v\geq 0} \frac{v^T x_k}{\min\limits_{j\neq k}\left\{v^T x_j\right\}} \qquad (8)$$

ここで，$x_j \Leftrightarrow p_j$(j=1, …, N)，$x_k \Leftrightarrow$c と対応させると，(9)を得る。

$$f_{\max} = \min_{v\geq 0} \frac{v^T c}{\min\limits_{j}\left\{v^T p_j\right\}}$$

$$= \min_{v\geq 0} \frac{v^T x_k}{\min\limits_{j\neq k}\left\{v^T x_j\right\}} = \theta^{-1} \qquad (9)$$

すなわち，多品種最大フロー問題(従って，多品種最小カット問題)は，「P_jを入力データ(列)ベクトルとして持つパス j を DMU_j(j=1, 2, …, N)として，c を入力データとして持つ k=N+1 番目の DMU_kとして考えた時に，DMU_kのDMU_j(j=1, 2, …, N)群に対する超効率値(厳密には，その逆数)を評価する問題」である。但し，出力データ項目数=1 で，データ値もすべて 1 である，y_j=1(j=1, …, N, N+1=k)。大ざっぱに言うならば，DMU_j(j=1, …, N)は，パス j を入力資源として使うことによりフロー出力値 1 を達成する。これらの DMU 群{DMU_1, …, DMU_N}と比較して，枝容量ベクトル c の全枝容量を入力資源として使うことによりフロー出力値 1 を達成する注目 DMU_kがどれほど効率的か(あるいは，非効率的か)を評価する，と言える。

〔例 1〕図 1 に示す 2 品種フローネットワークにおいて，点 a－c，点 b－d 間にフローを流す場合を考える。枝－パス接続行列は(10)で与えられる。

$$P = \begin{array}{c} \\ \text{枝}1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{パス}1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & 1 & \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \\ 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (10)$$

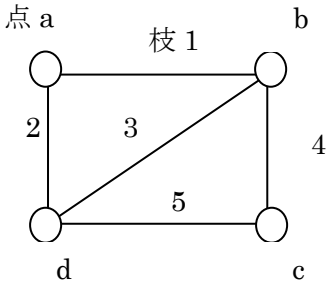

図 1　2 品種フローネットワーク(a－c と b－d)

例えば，パス 1 は枝 1，4 の a－c 間の径路，パス 4 は枝 1，2 の b－d 間の径路に対応する。

枝容量ベクトル c=(2, 1, 3, 3, 4)^{T}の場合には，(9)式の min は，v=(0, 1, 1, 1, 0)^{T}で達成される。$v^T c$=7，min{$v^T P_j$}=1 となり，(11)となる。

$$f_{\max} = \theta^{-1} = 7 \qquad (11)$$

枝容量ベクトル c=(2, 1, 3, 4, 3)^{T}の場合には，(9)式の min は，例えば，v=(1, 1, 2, 1, 1)^{T}で達成され，$v^T c$=16, min{$v^T P_j$}=2 となり，(12)となる。

$$f_{\max} = \theta^{-1} = 8 \qquad (12)$$

＜例 1 終り＞

4. 生産効率性ゲームの超効率性 DEA モデル

(3)と(7)を比較し，拡大係数行列 B'={B, b}を既存の係数行列 B に右辺定数ベクトル b を付加して，定義する。

$$B' = \{B, b\} = \{b_1, b_2, \cdots, b_N, b\} \qquad (13)$$

(7)において，$y_j=1$ とし，$u^T y_j=1$ より(14)となる。

$$\eta = \min_{v\geq 0} \frac{v^T x_k}{\min\limits_{j\neq k}\{v^T x_j\}} \qquad (14)$$

ここで，$x_j \Leftrightarrow b_j$(j=1，…，N)，$x_k \Leftrightarrow b$ と対応させると，(15)を得る。

$$Z_{\max} = \min_{v\geq 0} \frac{v^T b}{\min\limits_{j}\{v^T b_j\}} = \min_{v\geq 0} \frac{v^T x_k}{\min\limits_{j\neq k}\{v^T x_j\}} = \theta^{-1} \qquad (15)$$

すなわち，収益最大化生産計画問題(3)(あるいは，生産計画問題(1)の双対問題でもある資源評価問題(2))は，「bj を入力データ(列)ベクトルとして持つ DMUj(j=1，2，…，N)として，b を入力データとして持つ k=N+1 番目の DMU_k として考えた時に，DMU_k の DMUj(j=1，2，…，N) 群に対する超効率値(厳密には，その逆数)を評価する問題」である。ただし，出力データ項目数=1 で，データ値もすべて 1 である、$y_j=1$(j=1，…，N，N+1=k)。

大ざっぱに言うならば，DMUj(j=1，…，N)は，製品 j を 1 収益単位生産するために必要な資源量ベクトル bj を入力資源として使うことにより出力である収益を 1 単位達成する。これらの DMU 群 {DMU_1，…，DMU_N}と比較して，全資源量ベクトル b を入力資源として使うことにより収益を 1 単位達成する注目 DMU_k がどれほど効率的か(あるいは，非効率的か)を評価する…と言える。

〔例 2〕収益最大化生産計画問題(3)の係数行列 B，右辺定数項列ベクトル b が(16)，(17)で与えられる場合を考える。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \qquad (16)$$

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (17)$$

ここで，$v=(1, 2, 0)^T$ と与えると，(18)となり，従って，(15)として(19)が成立する。

$$v^T b=14 \ ,\quad v^T b_1=2 \ ,\quad v^T b_2=2 \ ,\quad v^T b_3=2 \qquad (18)$$

$$Z_{\max} = \frac{v^T b}{\min\{v^T b_1, v^T b_2, v^T b_3\}} = 7 \qquad (19)$$

＜例 2 終り＞

5. 資源を丁度使い切る場合についての考察

(9)式(あるいは，(15)式)において、もし次式(20)が成立するならば，最大フロー問題を，「P_j を出力データとして持つパス j を DMUj(j=1，…，N)として，ネットワーク容量 c を出力データとして持つ k=N+1 番目の DMU_k を考えた時に，DMU_k の DMUj(j=1，2，…，N)群に対する超効率値を評価する問題」となり，直観的な解釈が可能となる。

$$f_{\max} = \max_{v\geq 0} \frac{v^T c}{\max\limits_{j}\{v^T P_j\}} \qquad (20)$$

(15)式対応… $$Z_{\max} = \max_{v\geq 0} \frac{v^T b}{\max\limits_{j}\{v^T b_j\}} \qquad (21)$$

以下に(20)式(あるいは(21)式)が成立する場合について考察する。まず，収益最大化生産計画問題の逆問題(収益最小化生産計画問題と呼ぶ)を(23)で定義する。(なお，LP 問題の逆問題，双対関係，転置関係については〔3〕を参照)。

収益最大化生産計画問題：

$$\left.\begin{array}{l} Z=1^T s \rightarrow \max \\ Bs \leqq b \\ s \geqq 0 \end{array}\right\} \qquad (22)$$

収益最小化生産計画問題：

$$\left.\begin{array}{l} Z'=1^T t \rightarrow \min \\ Bt \geqq b \\ t \geqq 0 \end{array}\right\} \qquad (23)$$

(22)の最適解の 1 つを s_0 とし，(24)が成立すると仮定する。

$$Bs_0 = b \qquad (24)$$

すると，(23)においてその最適解の 1 つを t_0 とするならば，(25)が成立する(但し，B≧0 等を仮定)。

$$t_0 = s_0 \qquad (25)$$

当然ながら，(26)も成立する。

$Z_{max} = Z'_{min}$ (26)

$Bt_0 = b$ (27)

(24)式は収益最大化生産計画問題において，最適解において資源を全て使い切ってしまう場合に，最大フロー問題においては，容量を全て使い切ってしまう場合に相当する。この場合については，(26)が成り立つので，収益最小化生産計画問題の分数定式化(28)が成立する。

$$Z_{\max} = Z'_{\min} = \max_{v \geq 0} \frac{v^T c}{\max_j \{v^T b_j\}} \quad (28)$$

$$f_{\max} = \max_{v \geq 0} \frac{v^T c}{\max_j \{v^T P_j\}} \quad (29)$$

〔例 3〕例 1 で $c=(2, 1, 3, 3, 4)^T$ の場合には，$x=(0, 0, 3, 1, 3)^T$ が最適解の 1 つである。

$Px=(1, 1, 3, 3, 3)^T \neq c$ (30)

よって，容量を使い切っていない。

一方，例 1 で $c=(2, 1, 3, 4, 3)^T$ の場合には，$x=(1, 0, 3, 1, 3)^T$ が最適解の 1 つであり，かつ(31)が成立する。

$Px=(2, 1, 3, 4, 3)^T=c$ (31)

よって，容量を使い切っているので，(29)式が成立する(なお，(29)式は最大カットの連続変数分数表示にもなっている)。 ＜例 3 終り＞

〔例 4〕例 2 で $b=(4, 5, 4)^T$ の場合には，$s=(2, 4, 1)^T$ が最適解の 1 つである。

$Bs = (4, 5, 3)^T \neq b$ (32)

よって，資源に余剰有り。

一方，例 2 で，$b=(4, 5, 3)^T$ とすれば，(33)が成立し，資源を使い切る。

$Bs = b$ (33)

$v=(1, 2, 0)^T$ とすれば，(34)，(35)，(36)が成立する。

$v^T b_1=v^T b_2=v^T b_3=2$ (34)

$v^T b=14$ (35)

$$Z_{\max} = Z'_{\min} = \frac{v^T b}{\max\{v^T b_1, v^T b_2, v^T b_3\}} \quad (36)$$

＜例 4 終り＞

6. おわりに

生産システムにおける効率性ゲームならびに多品種最大フロー問題を例として、あるクラスの線形計画問題に対して、超効率性 DEA モデルにもとづく考察・解釈を行った。大ざっぱに言うならば、例えば、多品種最大フロー問題、より一般的には最大フロー問題では、ネットワークの最大フロー値は、ネットワークの容量ベクトルを活動とみなした時に、その注目活動のさまざまなネットワークを形成するパス活動群に対する超効率値となる。

最大フロー問題以外の組み合わせ問題、グラフ・ネットワーク問題への適用、枝評価ベクトル v の離散評点十分性(例えば[4])、などは今後の研究課題である。

参考文献

［1］篠原正明、篠原健：生産システムにおける効率性ゲーム、日本オペレーションズ・リサーチ学会 2006 年秋季研究発表会論文集 pp. 240-241 (2006. 2).

［2］篠原正明：網における流れと圧の最大、最小および可能領域決定問題、数理計画法―その解法と適用事例―、報文シリーズ、T-74-1, 日本オペレーションズ・リサーチ学会(1974. 2).

［3］篠原正明：グラフ理論におけるカバリングとパッキング(その 1)―クリークカット問題、一般化彩色問題―、日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会論文集 pp. 65-66(1973. 4).

［4］篠原正明、茂木渉、大澤慶吉、藤沢雅之：連続評点 DEA における離散評点十分性（その 1），（その 2）、第 43 回日本大学生産工学部・学術講演会・数理情報部会 (2010. 12. 4).