7-28

連続評点DEAにおける離散評点十分性

-その２：多入力多出力CCRモデル-

日大生産工　篠原　正明　(財)計量計画研究所　茂木　渉
日大生産工　大澤慶吉　日大生産工　○藤沢 雅之

1.　はじめに

(その1)［１］において、1入力ｓ出力(ｓ=2)、m入力1出力(m＝2)CCRモデルにおける「連続評点DEAにおける離散評点十分性」について考察した。本論文では、多入力多出力CCRモデル(m入力ｓ出力、m＞１、ｓ＞１)における「連続評点DEAにおける離散評点十分性」について考察する。

入力ウェイトと出力ウェイトに関する条件を分離するアプローチを提案し(2節)、特に、m＝ｓ=2の場合について例題を通して検討する(3節)。m>2、ｓ>2の場合について、１入力s出力CCR、m入力１出力CCRモデルに関するフロンティア･ファセット面とウェイトベクトルとの直交条件を説明する(4節)。4節の結果と2節の入力ウェイト･出力ウェイト条件分離アプローチを合わせることにより、一般の多入力多出力CCRモデルでの「連続評点DEAにおける離散評点十分性」条件を検討する。

2．入力ウェイト出力ウェイト条件分離アプローチ

(その1)［1］のnDMU m入力ｓ出力DEA－CCRモデルの$\mathbf{DMU_k}$についての DEA 効率値$\mathbf{D_k}$定式化を以下に再掲する。

目的関数：$$\mathbf{D_k} = \frac{\frac{\mathbf{u^T y_k}}{\mathbf{v^T x_k}}}{\max_j\{\frac{\mathbf{u^T y_j}}{\mathbf{v^T x_j}}\}} \quad \to 最大化 \quad (1)$$

制約条件：$\mathbf{v} \in V$　,$\mathbf{u} \in \mathbf{U}$　　(2)

一般に、フロンティア面上にある隣接するDMUα，βについては、次式(3)が成立する。

$$\frac{u^T y_\alpha}{\mathrm{v}^T x_\alpha} = \frac{u^T y_\beta}{\mathrm{v}^T x_\beta} \qquad (3)$$

次式(4)は(3)式が成立するための1つの十分条件である。

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{v}^T x_\alpha &= \mathrm{v}^T x_\beta \\ \mathbf{u^T} y_\alpha &= \mathbf{u^T} y_\beta \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

3．2入力2出力CCRモデルの例題

2節の(4)式は2入力2出力CCRモデルの「連続評点DEAにおける離散評点十分性」条件であり、(その1)［１］の3節の2つの定理3.１と定理3.２を直接適用できる。

［例3.１]6DMU2入力2出力CCRモデル

入力データ1が2点法{1，2}、入力データ2が3点法{1，2，3}、出力データ1が5点法{1，2，3，4，5}、出力データ2が5点法{1，2，3，4，5}で表1で与えられる。

表1：６DMU2入力2出力CCRモデルのデータ

DMU		1	2	3	4	5	6
入力	1	1	2	1	2	1	2
	2	1	2	3	1	2	3
出力	1	2	4	5	3	3	4
	2	5	4	3	4	3	2

入力1ウェイトを2段階$\mathbf{V_1} = \{\mathbf{1, 2}\}$、入力2ウェイトを1段階$\mathbf{V_2} = \{\mathbf{1}\}$、出力1ウェイトを4段階$\mathbf{U_1} = \{\mathbf{1, 2, 3, 4}\}$、出力2ウェイトを4段階$\mathbf{U_2} = \{\mathbf{1, 2, 3, 4}\}$とした離散評点DEA－CCRモデルの評点結果を表2に示す。又、出力データ1、2は5点法データであるが、各々の最小値=2、最大値=5なので、実質的には4点法データである。表3に、出力1，2のウェイトを共に3段階$\mathbf{U_1 = U_2 = \{1, 2, 3\}}$とした場合の評価結果を示すが、表2と同じDEA効率値となる。又、表4には連続評点DEA－CCRモデルの評価結果を示すが、表2、

Discrete Scoring Sufficiency Condition for Continuous Scoring DEA
-Part 2-　Multiple Input Multiple Output CCR Model
Masaaki SHINOHARA, Wataru MOGI, Keikichi OSAWA and Masayuki FUJISAWA

表3のDEA効率値とは効率的DMU1,3,4については一致するが、非効率的DMU2,5,6については不一致である。これは、式(3)と式(4)式が同値でないため、入力ウェイト出力ウェイト条件分離アプローチにより決定される条件式群は本来の厳密なフロンティア・ファセット面を構成する条件式群の一部分となるためである。

4. 等間隔離散データ集合下でのｍ入力ｓ出力 CCRモデルに対する離散評点十分性命題

(その1)[１]の(5)、(6)、(7)、(8)、(10)、(11)、(12)式はいずれもフロンティア・ファセット面とウェイトベクトルとの直交条件であり、したがって、s次元出力ウェイトベクトル$u=(u_1, u_2, .., u_s)$の各要素間には比例関係式(5)が、ｍ次元出力ウェイトベクトル$v=(v_1, v_2, .., v_m)$の各要素間には比例関係式(6)が、各フロンティア・ファセット面と直交するための1つの十分条件となる。

$$u_1 : u_2 : \cdots : u_s = |\triangle_{y1}|^{-1} : |\triangle_{y2}|^{-1} : \cdots : |\triangle_{ys}|^{-1} \quad (5)$$

$$v_1 : v_2 : \cdots : v_m = |\triangle_{x1}|^{-1} : |\triangle_{x2}|^{-1} : \cdots : |\triangle_{xm}|^{-1} \quad (6)$$

たとえば、s=3では(5)式は以下の(7)式となる。

$$u_1 : u_2 : u_3 = |\triangle_{y1}|^{-1} : |\triangle_{y2}|^{-1} : |\triangle_{y3}|^{-1} = |\triangle_{y2}||\triangle_{y3}| : |\triangle_{y1}||\triangle_{y3}| : |\triangle_{y1}||\triangle_{y2}| \quad (7)$$

すなわち、入力ウェイト出力ウェイト条件分離アプローチを採用した下で、以下の命題を得る。

[命題4.１：ｍ入力ｓ出力CCRモデル]

ｍ入力ｓ出力DEA-CCRモデルにおいて、入力データ$\{x_{ij}\}$(i=1,2･･,m; j=1,2,･･,n)の第iデータが等間隔NX_i点法（すなわち、{1,2,･･, NX_i}）(i=1,2･･,m;)、出力データ$\{y_{rj}\}$（ｒ=1, 2･･,ｓ; j=1, 2, ･･･, ｎ）の第rデータが等間隔NY_r点法（すなわち、{1,2,･･, NY_r}）(ｒ=1,2･･,s)で与えられるならば，入力ウェイトiの値集合はV_i={１，２，･･，$\prod_{k\neq i} NX_k - 1$ }の等間隔$\prod_{k\neq i} NX_k - 1$段階、出力ウェイトrの値集合はU_r={１，２，･･，$\prod_{k\neq r} NY_k - 1$}の等間隔$\prod_{k\neq r} NY_k - 1$段階の離散評点で、水平部と垂直部を除いたフロンティア面を構成できる。□

５．おわりに

なお、本命題は例3.1に示すように一般のm入力ｓ出力に対しては必ずしも妥当ではないが、一般のm入力1出力と1入力ｓ出力の場合には入力ウェイト出力ウェイト条件分離を仮定しないので、その妥当性は今後の課題である。例えば、１入力４出力データで、各出力データが各々NY_1＝２、NY_2＝３、NY_3＝４、NY_4＝５点法で与えられるとするならば、フロンティアの垂直部と水平部を含めるならば、出力ウェイトベクトル$u=(u_1, u_2, u_3, u_4)^T$の各要素は各々３×４×５＝６０、２×４×５＝４０、２×３×５＝３０、２×３×４＝２４、の各段階の離散評点で十分と言える。また、フロンティアの垂直部と水平部を除外するならば「０」を除くので、１段階減少して、各々５９、３９、２９、２３段階とすれば良い。入力あるいは出力項目数が増加すると段階数は増加しなければならないが、一般のm入力1出力と1入力ｓ出力の場合には原理上は命題４．１により離散評点十分性が成立すると予想する。さらに、命題４．１の十分性定理は、「入力データと出力データを分離した前提下での条件」、「フロンティア面上のデータのみならず全データを考慮した条件」、などの点において、さらに厳密化できる可能性がある。これも今後の課題にする。

又、付表１には入力ウェイト、出力ウェイトを連続値とする連続評点DEAと入力ウェイト、出力ウェイトを離散値とする離散評点DEAの特徴ならびに長短所を整理した。なお、同様の比較検討としては、文献[２]も参考になる

参考文献

[1] 篠原、茂木、大澤、藤沢：連続評点DEAにおける離散評点十分性（その1）、第43回日本大学生産工学部・学術講演会・数理情報部会 (2010.12.4).

[2] 茂木 渉：意思決定法に関する研究、平成21年度日本大学大学院生産工学研究科修士論文、pp.28-29.

表2：離散評点DEA－CCRモデルのDEA効率値($V_1=\{1,2\}$、$V_2=\{1\}$、$U_1=\{1,2,3,4\}$、$U_2=\{1,2,3,4\}$)

DMU	1	2	3	4	5	6
フロンティアの水平・垂直部を考慮しないDEA効率値	1.0	0.727	0.982	0.79	0.818	0.546
最大効率値を達成したvとu(v_1、v_2、u_1、u_2)		(1131) (2131)	(2131)	(1131)	(2131)	(2131)
フロンティアの水平・垂直部を考慮したDEA効率値	1.0	0.8	1.0	1.0	0.818	0.64
最大効率値を達成したvとu(v_1、v_2、u_1、u_2)	(1,1,1,1) その他、多数	(1,1,1,0)	(1,0,1,1) その他、スラック部に多数	(0,1,1,1) その他、スラック部に多数	(2,1,3,1) (v_1=2, v_2=1, u_1=3, u_2=1)	(1,1,1,0)

表3：離散評点DEA－CCRモデルのDEA効率値($V_1=\{1,2\}$、$V_2=\{1\}$、$U_1=\{1,2,3\}$, $U_2=\{1,2,3\}$)

DMU	1	2	3	4	5	6
フロンティアの水平・垂直部を考慮しないDEA効率値	1.0	0.727	0.982	0.79	0.818	0.546
最大効率値を達成したvとu(v_1、v_2、u_1、u_2)		(1131) (2131)	(2131)	(1131)	(2131)	(2131)
フロンティアの水平・垂直部を考慮したDEA効率値	1.0	0.8	1.0	1.0	0.818	0.64
最大効率値を達成したvとu(v_1、v_2、u_1、u_2)	(1,1,1,1) その他、多数	(1,1,1,0)	(1,0,1,1) その他、スラック部に多数	(0,1,1,1) その他、スラック部に多数	(2,1,3,1) (v_1=2, v_2=1, u_1=3, u_2=1)	(1,1,1,0)

表４：連続評点DEA-CCRモデルのDEA効率値

No.	DMU	Score	V(1)	V(2)	U(1)	U(2)
1	1	1	0.393939	0.606061	0.424242	3.03E-02
2	2	0.9091	0.181818	0.318182	0.227273	0
3	3	1	0.579439	0.140187	0.149533	8.41E-02
4	4	1	0.282609	0.434783	0.304348	2.17E-02
5	5	0.8491	0.245283	0.377358	0.264151	1.89E-02
6	6	0.6897	0.137931	0.241379	0.172414	0

付録１：　連続評点DEA　ｖｓ　離散評点DEA

	連続評点DEA	離散評点DEA
論理面	・数理計画法による定式化 ・線形計画法の双対性にもとづき生産可能集合への展開(凸包モデル) ・ウェイトを連続変数として概念上解決	・すべての基本を(1)式の相対効率値D_kの最大化に置き、これよりCCRモデル、BCCモデルへと発展。
理解容易性	・CCRモデル、BCCモデル、加法モデルなどの基本モデルから様々に発展した。 ・現場のORワーカーにとっては、複雑になりすぎる傾向有り。 ・イプシロンε問題、スラックなどの問題有り。	・すべては(1)式の基本原理式にもとづくので、モデルの理解が容易。 ・基本原理が単純（すべてはここからスタート）なので現場のORワーカーに理解できる。 ・イプシロンε問題、スラックなどはウェイトの連続性に起因するので、これらの問題無し。
現実のモデル化	・ウェイトが連続値ゆえに極端な値をとりうる。 ・信頼領域法を適用しても、上記問題は残る。 ・連続値ゆえにウェイトの大小解釈が困難。	・簡易な表計算により簡易評価が可能（事前評価、事後評価、実行可能性評価）。 ・離散値ゆえにウェイトの大小相対比数が可。 ・データに５点法などの規則性があれば、離散評点値集合を適切に選べば、フロンティア面を構成できる(**本論文の研究課題**)。
計算面	連続最適化技法により高速化。	・組合せ最適化の問題。 ・表計算利用可。 ・一部ウェイトを連続化して、ハイブリッド高速化。
認知心理学	・ウェイトを連続変数として概念上解釈。	・人間は本来５つ前後の評点値を認知するのが限度である。