7-27

連続評点DEAにおける離散評点十分性

- その１：多入力１出力と１入力多出力CCRモデル -

日大生産工　篠原　正明　(財)計量計画研究所　茂木　渉
日大生産工　大澤慶吉　日大生産工　○藤沢 雅之

1. はじめに

ウェイトu, vとして非負実数値（$u \geqq 0, v \geqq 0$）等を想定する連続評点DEAにおいて、データ行列

$X = \{x_{ij}\}$, $Y = \{y_{rj}\}$ (i=1, …, m , j=1, …n , r=1, …, s)の構成要素であるx_{ij} , y_{rj}の値に依存してu, vの各要素値を各々有限な離散評点値の集合

$U=\{u_1, u_2, \cdots, u_L\}$, $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_M\}$に限定することができること、「連続評点DEAにおける離散評点十分性」、を説明する。

又、この「連続評点DEAにおける離散評点十分性」は、離散評点DEAにおいても適切に離散評点集合を選択すれば連続評点を十分に近似できることを意味する。

2．簡単な例

[例2. 1]5点法による2教科成績の長所優先評価（1入力2出力）

7人の学生A、B, …, Gの数学と理科の点数が表１に示す5点法{1, 2, 3, 4, 5}で与えられる場合について、1入力2出力DEA-CCRモデルとしてのフロンティア面を図1に示す。

ここで、長所優先評価とは学生の成績で優れている点を長所とみなし、その長所を優先して評価する方法である。

表1：7人の学生の数理の成績(5点法)

学生		A	B	C	D	E	F	G
入力		1	1	1	1	1	1	1
出力	数	2	4	2	1	2	2	3
	理	5	3	4	4	3	2	1

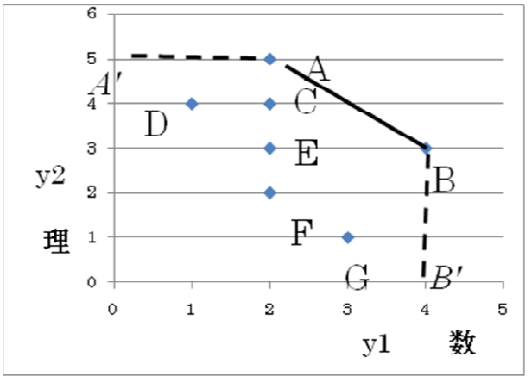

図1：7人の学生の成績の長所優先評価の図解

図１より、本例においてフロンティア面を構成する線分はA’A, AB, BB’の3本であり、対応する直線を

$u_1y_1 + u_2y_2 = \text{const}$ と表記するならば(横軸をy_1、縦軸をy_2)、u_1とu_2は各線分で以下のとおりである。　A’A… $u_1:u_2=0:1$,　AB… $u_1:u_2=1:1$, BB’ … $u_1:u_2=1:0$.

すなわち本例では出力ウェイト１は$U_1=\{0, 1\}$の2段階、出力ウェイト2は$U_2 = \{0, 1\}$の2段階の離散評点DEAで連続評点DEAを十分に代替できる。

さらに、フロンティア面で水平部(A’A)と垂直部(BB’)を除くと、出力ウェイト１は$U_1=\{1\}$の１段階、出力ウェイト２は$U_2 = \{1\}$の１段階でも十分である。

１入力２出力DEA-CCRモデルで、入力データx_j=１(for all DMU_j)で出力データy_{rj}が５点法で与えられる場合にはフロンティアを構成しうるu_1とu_2の比$u_1:u_2$は例2. 1に例示した以外に以下の場合が考えられる。

４：１，３：１，２:1，４：３，３：２，１：２，
１：３，１：４，３：４，２：３.

すなわち、5点法の出力データは水平部と垂直部を除いたフロンティア面については、出力ウェイト１，２共に

Discrete Scoring Sufficiency Condition for Continuous Scoring DEA
-Part 1-　Single Input Multiple Output and Multiple Input Single Output CCR Models
Masaaki SHINOHARA, Wataru MOGI, Keikichi OSAWA and Masayuki FUJISAWA

U_1={1, 2, 3, 4}、$U_2 = \{1, 2, 3, 4\}$の4段階で十分である。［例2.1の終り］

［例2.2］入力データが5点法で与えられる７DMU2入力1出力DEA-CCRモデル

出力データy_j＝1 (for all DMU_j)で入力データx_{ij}が5点法で表2で与えられる場合のフロンティア面を図2に示す。

表2：７DMUの入出力データ

DMU		A	B	C	D	E	F	G
入力	1	1	2	4	2	3	4	4
	2	5	2	1	4	3	3	2
出力		1	1	1	1	1	1	1

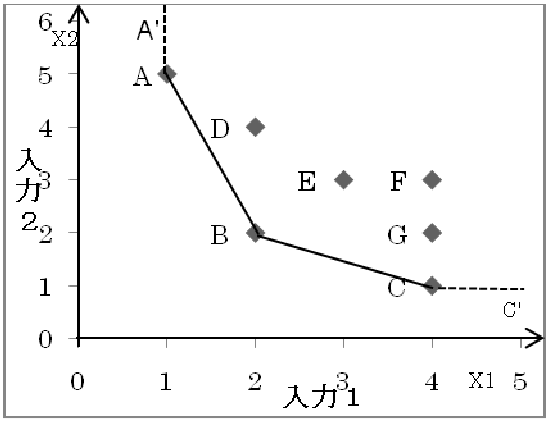

図2：７DMU２入力１出力DEA－CCRモデルの図解

図2より、本例においてフロンティア面を構成する線分はA’A, AB, BC, CC’の4本であり、対応する直線を$v_1x_1 + v_2x_2 = const$と表記するならばv_1とv_2は各線分で以下のとおりである。

A’A… $v_1 : v_2 = 1 : 0$、AB… $v_1 : v_2 = 3 : 1$、

BC… $v_1 : v_2 = 1 : 2$、CC’… $v_1 : v_2 = 0 : 1$.

例2.1と同様に5点法の入力データでは水平部と垂直部を除いたフロンティア面については$V = V_1 = V_2$＝{1, 2, 3, 4}で十分であることがわかる。［例2.2の終り］

［例2.3］出力データが5点法と3点法で与えられる７DMU1入力2出力DEA-CCRモデル

例2.1において数学の成績が5点法で理科の成績が3点法で与えられる場合のデータを表3に、1入力2出力DEA-CCRモデルとしてのフロンティア面を図3に示す。

表3：7人の学生の数学(**5点法**)と理科(**3点法**)の成績

学生		A	B	C	D	E	F	G
入力		1	1	1	1	1	1	1
出力	数	1	2	4	5	2	3	3
	理	3	3	2	1	2	2	1

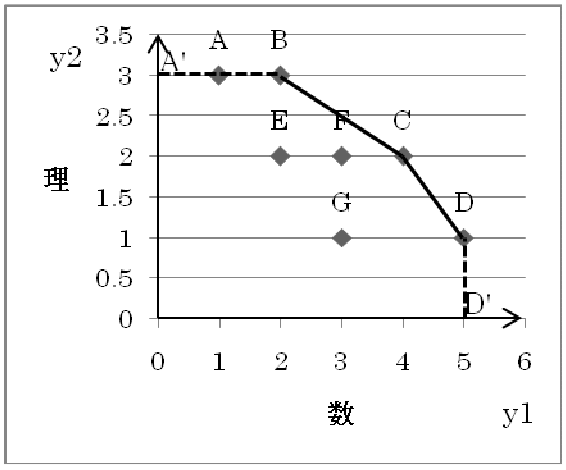

図3：7人の学生の成績の図解(例2.3)

図3より、本例においてフロンティア面を構成する線分はA’A, AB, BC, CD, DD’の5本であり、対応する直線を$u_1y_1 + u_2y_2 = const$と表記するならば、u_1とu_2は以下の通りである。A’A… $u_1 : u_2 = 0 : 1$、

AB… $u_1 : u_2 = 0 : 1$、BC… $u_1 : u_2 = 1 : 2$

CD… $u_1 : u_2 = 1 : 1$、DD’… $u_1 : u_2 = 1 : 0$.

一般的には、上記以外に$u_1 : u_2$=1:3, 1:4, 2:1, 2:3の場合が考えられる。すなわち、出力1データ値y_{1j}が5点法(すなわち、{1, 2, 3、4, 5}の中から1つ)、出力2データ値y_{2j}が3点法(すなわち、{1, 2, 3}の中の1つ)で与えられる本例では水平部と垂直部を除いたフロンティア面については、出力ウェイト１については２(＝３－１)段階U_1={1, 2}、出力ウェイト２については４(＝５－１)段階U_2={1, 2, 3、4}で十分である。［例2.3の終り］

３．等間隔離散データ集合下の離散評点十分性定理

前例の例2.1、例2.3の考察に基づき次の定理3.1が成立する。

［定理3.1：1入力2出力CCRモデル］

1入力2出力DEA-CCRモデルにおいて、入力データx_j=1 (for all DMU_j)に対応して、出力データ$\{y_{rj}\}$（r

=1，2；j=1，2、…、n）が、出力データ値1y_{1j}が等間隔N_1点法(すなわち{1，2,…,N_1})、出力データ値2y_{2j}が等間隔N_2点法(すなわち{1,2,…,N_2})で与えられるならば，出力ウェイト1の値集合はU_1＝{1，2，‥，N_2－1}の等間隔N_2－1段階、出力ウェイト2の値集合はU_2＝{1，2，‥N_1－1}の等間隔N_1－1段階の離散評点で、水平部と垂直部を除いたフロンティア面を構成できる。□

（証明略）

例えば、数学の成績が５点法(すなわち、{1,2,3,4,5})、理科の成績が３点法（すなわち、{1,2,3}）で与えられるならば、（1）式の仮想成績値を計算するに際して、数学の評価ウェイトu_1は2段階U_1={1,2}、理科の評価ウェイトu_2は4段階U_2={1,2,3,4}を採用すべき点を定理3.1は示唆している（例2.3）。

仮想成績値＝数学の評価ウェイトu_1×数学の成績点＋理科の評価ウェイトu_2×理科の成績点　（1）

前節の例2.2の考察にもとづき、次の定理3.2が成立する。

[定理3.2：２入力１出力ＣＣＲモデル]

２入力１出力ＤＥＡ－ＣＣＲモデルにおいて、出力データy_j＝1（for all DMU_j）に対応して、入力データ{x_{ij}}（i=1,2; j=1,2,‥,n)が、入力データ値1x_{1j}が等間隔N_1点法（すなわち、{1,2,‥，N_1}）、入力データ値2x_{2j}が等間N_2点法（すなわち{1,2,‥，N_2}）で与えられるならば、入力ウェイト1の値集合はV_1={1,2,‥，N_2－1}の等間隔N_2－1段階、入力ウェイト2の値集合はV_2={1,2,‥，N_1－1}の等間隔N_1－1段階の離散評点で、水平部と垂直部を除いたフロンティア面を構成できる。□

（証明略）

４．１入力２出力と２入力１出力以外の場合について

３節において、１入力２出力と２入力１出力のＤＥＡ－ＣＣＲに関する離散評点十分性定理を与えたが、１入力２出力、２入力１出力以外の場合について以下に考察する。

4.1　１入力s出力ＤＥＡ－ＣＣＲモデル

一般にnDMU/m入力/s出力DEA－CCRモデルのDMU_kのDEA効率値D_kは以下の（2）、（3）で定式化できる。

目的関数：$D_k=\dfrac{\frac{u^T y_k}{v^T x_k}}{\max\left\{\frac{u^T y_j}{v^T x_j}\right\}}$　→最大化　（2）

制約条件：v∈V、u∈U　（3）

CCRモデルで１入力の場合には、（2）式において、x_j=1(for all DMU_j)、v=1とすることにより、目的関数は（4）となる。

目的関数：$D_k=\dfrac{u^T y_k}{\max\{u^T y_j\}}$　→最大化　(4)

s＝２の２出力の場合には、２次元平面（y_1、y_2）のフロンティア面を構成する１つの線分（DMU_α、DMU_β）、あるいは（α、β）、に注目しよう（図４）。

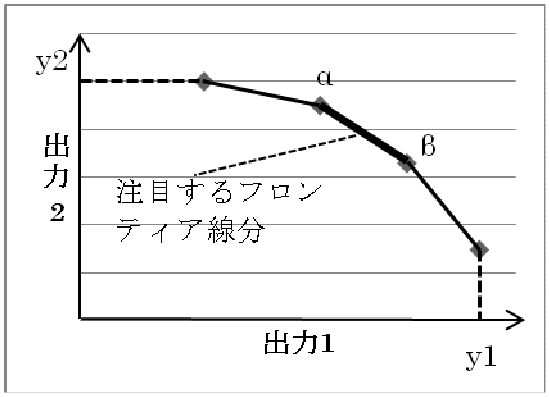

図４：2出力の2次元平面図

このフロンティア線分（α、β）においては、（4）式において以下の（5）式が成立している。

$$\frac{u^T y_\alpha}{u^T y_\beta}=1\left(\text{あるいは}\frac{u^T y_\beta}{u^T y_\alpha}=1\right)\quad(5)$$

形式的には、（4）式において、k=α、　β=arg max{$u^T y_j$}とすると（5）式、k=β、α=arg max{$u^T y_j$}とすると（5）式の括弧内の式が得られる。いずれの場合でも、(6)、(7)式を得る。

$u^T y_\alpha = u^T y_\beta$ （6），　$u^T (y_\alpha - y_\beta) = 0$ （7）

s＝２では（7）は以下の（8）式となる。

$u_1 (y_{1\alpha} - y_{1\beta}) + u_2 (y_{2\alpha} - y_{2\beta}) = 0$ （8）

２次元フロンティア面上では一般に、$\Delta_1 = y_{1\alpha} - y_{1\beta}$、

$\Delta_2 = y_{2\alpha} - y_{2\beta}$ の一方は負となるので、以下の比例式

（9）式が成立する。

$$u_1 : u_2 = |\Delta_1| : |\Delta_2| \quad (9)$$

この比例関係にもとづき、３節の定理3.1が成立する。従って、ｓ＝３では、３次元出力間でのフロンティア面上でファセット面を構成するDMUをα、β、γとすると、以下の関係式（10）が成立する（図５）。

$$\left.\begin{array}{l} u^T y_\alpha = u^T y_\beta \\ u^T y_\alpha = u^T y_\gamma \\ (u^T y_\beta = u^T y_\gamma) \end{array}\right\} \quad (10)$$

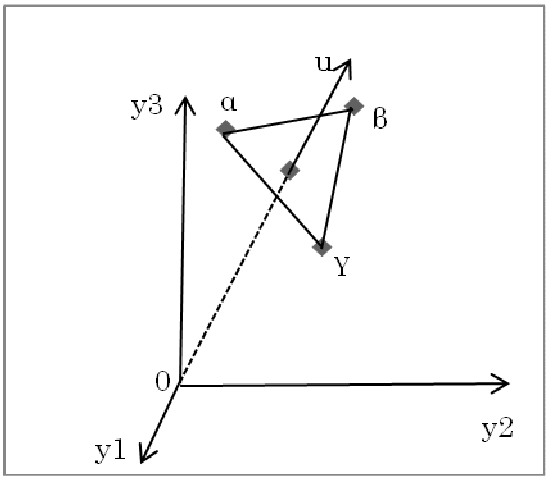

図5：3出力の3次元空間でのフロンティア面（α、β、γ）と直交する出力ウェイトベクトルu

一般のｓ出力では、ｓ次元空間でのあるフロンティア・ファセット面を構成するDMUを１、２、３、‥、ｓとすると、例えば以下の関係式（11）が成立する。

$$\left.\begin{array}{l} u^T y_1 = u^T y_2 \\ u^T y_2 = u^T y_3 \\ u^T y_3 = u^T y_4 \\ \quad : \\ u^T y_{s-1} = u^T y_s \end{array}\right\} \quad (11)$$

4.2　m入力１出力　DEA-CCRモデル

１入力ｓ出力の場合と同様の考察により、m入力１出力DEA-CCRモデルでは例えば以下の関係式（12）が成立する。

$$\left.\begin{array}{l} v^T x_1 = v^T x_2 \\ v^T x_2 = v^T x_3 \\ v^T x_3 = v^T x_4 \\ v^T x_4 = v^T x_5 \\ \quad : \\ v^T x_{m-1} = v^T x_m \end{array}\right\} \quad (12)$$

なお、(11)、(12)式はウェイトベクトルとあるフロンティア・ファセット面との直交条件を、ファセット面を構成する各辺との直交条件で表現した一例である。

5. おわりに

連続評点DEAにおいて、1入力２出力CCRと２入力１出力CCRモデルの場合には、フロンティア面が有限の辺を持つ凸多角形となる点に注目して、フロンティア辺に対応するウェイトベクトルのみを考慮することにより、離散評点でも連続評点によるのと同じフロンティア面を構成することができる「連続評点DEAにおける離散評点十分性定理」を等間隔離散データ集合の場合に示した。４節では、１入力s出力CCR、m入力１出力CCRモデルについて、フロンティア・ファセット面とウェイトベクトルとの直交条件を示したが、詳細な条件は[１](その２)を参照のこと。

参考文献

[1]篠原、茂木、大澤、藤沢：連続評点DEAにおける離散評点十分性（その２）、第43回日本大学生産工学部・学術講演会・数理情報部会（2010.12.4）.