7-25

複式簿記理論の位相幾何学的考察（その７）

―ネットワークDEAによる効率性評価―

日大生産工　○篠原　正明
情報システム研究所　篠原　健

1. はじめに

複式簿記・取引ネットワークでは、各勘定ノード毎に複数の入出力取引項目が存在し、ある取引項目はある勘定ノードの入力であり、同時に他の勘定ノードの出力となる。従って、ある期間での企業会計システム全体としての効率性評価は、個々の勘定ノードの効率性尺度をいかに統合し、システム全体としての効率性尺度を確立するかが課題となる。本論文では、期間企業会計効率性評価問題に対して、会計システムをDMU、枝取引額をリンクデータZ＝｛z_i｝、勘定ノードをDMU内部門ノード$V = \{1, \ldots, N\}$に対応させたネットワークDEAを適用する。
ここで、枝取引額（期間フロー値）としては、金額のみならず人数、物量（ヒト、カネ、モノ）のベクトル値をも許容する。

2. ネットワークDEAの適用例

図１に示す３つの勘定ノード①,②,③から構成されるある企業の期間取引ネットワークを考える。６つの枝取引が存在し、１つの枝には複数の取引額が集約されている。勘定ノード①については、枝「２」、「４」が入力、枝「１」、「３」が出力、勘定ノード②については、枝「１」、「６」が入力、枝「２」、「５」が出力、勘定ノード③については、枝「３」、「５」が入力、枝「４」、「６」が出力である。すなわち、例えば枝取引「１」は勘定ノード②の入力であると共に、勘定ノード①の出力になっている。

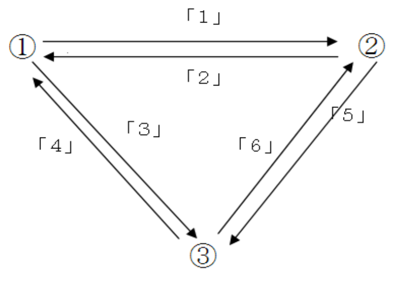

図１：３ノード６枝の取引ネットワーク例

2.1　全ノード集合に対する効率性評価

図１において、ノードi(i=1,2,3)の部門別絶対効率値は（１）～（３）で与えられる。

$$f_1 = \frac{q_1+q_3}{q_2+q_4} \quad (1) \qquad f_2 = \frac{q_2+q_5}{q_1+q_6} \quad (2) \qquad f_3 = \frac{q_4+q_6}{q_3+q_5} \quad (3)$$

但し、$q_i = {w_i}^T z_i \quad (i = 1, \ldots, 6)$　　（４）

w_i：枝「i」のウェイト、z_i：枝「i」のデータ

x_iをノードiの重要度とするならば、DMU_kの全体絶対効率値A_kは（５）で与えられる。　$A = {f_1}^{x_1} \cdot {f_2}^{x_2} \cdot {f_3}^{x_3}$　（５）

但し、（５）において添字ｋは省略し、$x_1 + x_2 + x_3 = 1$あるいは$x_1 + x_2 + x_3 = 3$である。

なお、添字ｋを省略しなければ、（５）は（６）で表現、正規化条件として$x_1 + x_2 + x_3 = 1$を採用する（x_iの陽表現は付録1）。

$$A_k = {f_{1k}}^{x_{1k}} \cdot {f_{2k}}^{x_{2k}} \cdot {f_{3k}}^{x_{3k}} \quad (6)$$

（６）は、正確には、枝ウェイト$w = \{w_i\}$が所与での値なので、$A_k(w)$と表現できる。すると、枝ウェイトw所与での全体相対効率値$R_k(w)$は（７）となる。

$$R_k(w) = \frac{A_k(w)}{\max_j\{A_j(w)\}} \quad (7)$$

この$R_k(w)$をwを変化させて、最大値を求めたものがDEA効率値、$\max R_k$、である。　$\max R_k = \max_w R_k(w)$　（８）

[例１]　図１の３ノード６枝の取引ネットワークにおいて、表１の５DMU分のリンクデータに対して、（１，２）-２段階離散評点ネットワークDEAを適用した結果を表２に示す。

表１：例１のリンクデータ表

	DMU 1	DMU 2	DMU 3	DMU 4	DMU 5
z1	1	2	5	1	0
z2	2	3	1	6	2
z3	10	1	3	3	9
z4	1	1	3	3	0
z5	2	5	2	8	1
z6	3	3	2	1	8

（例１終わり）

Topological Consideration on Double-entry Bookkeeping System
ーPart 7：Efficiency Evaluation via Network DEAー
Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

[例２]　図１の取引ネットワークにおいて、表３の５DMU分のリンクデータの場合の評価結果を表４に示す。

表３：例２のリンクデータ表

	DMU 1	DMU 2	DMU 3	DMU 4	DMU 5
z1	1	2	1	2	1
z2	2	3	1	1	1
z3	3	1	3	3	3
z4	1	1	3	2	2
z5	2	2	2	3	3
z6	3	3	2	1	2

（例２終わり）

例１と例２の評価結果(表2と表4)を見ると、全ノード集合に対する効率性評価では、すべての$\mathrm{DMU_k}$(k=1、…,5)のDEA効率値=$\mathrm{maxR_k}$(k=1、…,5)が1.0か、それに近い値となっている（特に例２では）。これは、あるリンク項目、例えば、リンク１は、部門①の出力項目であると同時に部門②の入力項目となっている。そのため、DMU全体として見れば、適当な評価を行えば、全体効率値は高くなりうると考えられる。例１、例２では、２段階評価であるが、３段階、５段階，等の多段階離散評点、さらに、連続評点を採用すれば、上述した「すべてのDMUのDEA効率値= $\mathrm{maxR_k}$が1.0」となる現象はより顕著になると思われる。

2.2　部分ノード集合に対する効率性評価

例１と例２では、全ノード集合に対する効率性評価を行ったが、評価対象となる部門ノード集合が、全ノード集合の部分集合に限定される場合を次に考察する。例えば、現金と売掛金を含めたキャッシュフローの効率性に注目するならば、現金ノード、売掛金ノードからなる部分集合に注目すればよい。図１の取引ネットワークにおいて、ノード②とノード③の部分集合に注目すると、$\mathrm{DMU_k}$の全体絶対効率値$\mathrm{A_k}$は（９）で与えられる。

$$\mathrm{A_k} = \mathrm{f_2}^{x_2} \cdot \mathrm{f_3}^{x_3} \quad (9)$$

但し、$x_2 + x_3 = 1$あるいは$x_2 + x_3 = 2$である（x_2、x_3の陽表現は付録２）。　枝ウェイトw = $\{\mathrm{w_i}\}$所与での$\mathrm{DMU_k}$の全体相対効率値$\mathrm{R_k(w)}$は（１０）となる。

$$\mathrm{R_k(w)} = \frac{\mathrm{A_k(w)}}{\mathrm{max_j\{A_j(w)\}}} \quad (10)$$

DEA効率値は（１１）で求まる。

$$\mathrm{maxR_k} = \mathrm{max_w\,R_k\,(w)} \quad (11)$$

[例３]　図１の３ノード６枝の取引ネットワークにおいて、表５(表１と同じゆえ省略)の５DMU分のリンクデータに対して、部分ノード集合{②,③}に注目したネットワーク効率値関数（９）にもとづき（１，２）-２段階離散評点ネットワークDEAを適用した結果を表６に示す。　なお、表６の「max達成時ノード重要度」では、$x_1 + x_2 + x_3 = 1$の場合のx_1、x_2、x_3と、参考のため、$x_2 + x_3 = 1$の場合のx_2、x_3を示した。

（例３終わり）

[例４]　部分ノード集合{②，③}に注目したネットワーク効率値関数（９）にもとづき図１の取引ネットワークにおいて表７（表３と同じ）の５DMU分のリンクデータの場合の評価結果を表８に示す。　　　　　　　　（例４終わり）

例３と例４の評価結果（部分ノード集合）を、例１と例２の評価結果（全ノード集合）と比較すると、非効率的なDMU（例３ではDMU１，３，５、例４ではDMU１，４，５）と効率的なDMU（例３では２，４、例４ではDMU２，３）が例３と例４では存在することがわかる。よりきめの細かい離散評点あるいは連続評点を採用すれば、非効率的DMUでも、そのDEA効率値はより高くなり、1.0に近づくと予想される。しかし、例１と例２のように、「すべてのDMUのDEA効率値が1.0」となる現象は生じないと思われる。この理由は、・・・あるリンク項目はある部門の入力であると同時に他のある部門の出力でもあるが、部門ノード集合に注目してネットワーク効率値関数Aを定義しているからである。なお、部分ノード集合が1つの部門ノードのみから構成される場合の部分ノード集合・ネットワークDEAは、注目するノードについての従来型のブラックボックスDEAと同じである。

3.考察と課題

3.1基本定式化

2.1節の全ノード集合の場合を含めて、部分ノード集合Sに対するネットワーク効率性評価を以下に定式化する。

枝ウェイトw所与での$\mathrm{DMU_k}$の絶対効率値$\mathrm{A_k(w)}$：

$$\mathrm{A_k(w)} = \prod_{\mathrm{i \in s}} \mathrm{f_{ik}}^{x_{\mathrm{ik}}\mathrm{(w)}} \quad (k=1,\ldots,N) \quad (12)$$

但しSはネットワーク効率値を定義する注目するノード集合。

枝ウェイトw所与での$\mathrm{DMU_k}$の相対効率値$\mathrm{R_k(w)}$：

$$\mathrm{R_k(w)} = \frac{\mathrm{A_k(w)}}{\mathrm{max_j\{A_j(w)\}}} \quad (k=1,\ldots,N) \quad (13)$$

DMU毎に枝ウェイトwを変化させて$\mathrm{R_k(w)}$を最大化した$\mathrm{DMU_k}$のDEA効率値$\mathrm{maxR_k}$：

$$\mathrm{maxR_k} = \mathrm{max_w}\ \mathrm{R_k(w)} \quad (k=1,\ldots,N) \quad (14)$$

3.2 定式化の変形(非連動アプローチ)

3.1の基本定式化は、ノード重要度$\boldsymbol{x}$が枝ウェイトwから決まるという「枝ウェイトw-ノード重要度$\boldsymbol{x}$」連動モデルである。連動の

仕方としては、マルコフ連鎖法と固有ベクトル法の二つの方法が考えられている([1]参照)。ノード重要度xを枝ウェイトwに連動させないで、固定的に与えるアプローチも、各勘定ノードの重要度が事前に与えられる状況下では必要となる。非連動アプローチと連動アプローチの比較は今後の課題である。

3.3 全ノード集合を対象とするネットワークDEA

例1と例2の評価結果に見られるように全ノード集合を対象とするネットワークDEAではすべてのDMUのDEA効率値が1.0となる傾向が予想される。あるリンク項目はある部門ノードの入力であると同時に他の部門ノードの出力ともなるため、リンクデータ値の大きさのネットワーク全体としての効率値への影響度合が中和されてしまうからである。

それでは全ノード集合を対象とするネットワークDEAは無意味なのであろうか? 全ノード集合を対象とするネットワークDEAに限らず、ネットワークDEAでは、程度の差こそあれ、すべてのDMU のDEA効率値が1.0に近づく傾向が観察できる。これは、複数の部門ノードからなる全体システムをネットワーク的に枝ウェイトwを変化して評価するためなので、傾向として回避できない現象と思われる。というか、この傾向が現実の評価結果とも一致すると考えられる。

そこで、ネットワークDEAではブラックボックスDEAと対比して、以下の点に留意して評価結果を考察する必要があると思う。

（1） すべてのDMUのDEA効率値が1.0あるいは近似的に1.0の場合でも、$\max R_k$が達成された評価ウェイトwの組合せ数の多い／少ないによって、DEA効率値1.0の安定性を評価すべきである。

（2） すべてのDMUのDEA効率値が1.0あるいは近似的に1.0の場合でも、部門別相対効率値を評価することにより、どのDMUのどの部門が効率的／非効率的かの判断をすることができる。

又、このような部門別相対効率値の評価は、全体システムがたとえ効率的と判断されても、その中に内包される非効率部門を同定するのに役立つ。

4. おわりに

複式簿記・取引ネットワークの全ノード集合あるいは部分ノード集合に対して定義されるネットワーク効率値関数にもとづくネットワークDEAを提案した。 ブラックボックスDEAと比較してネットワークDEAでは、一般的に、各DMUの効率値が高くなり1.0に近づく傾向があることを再確認できた。この傾向はネットワークDEAの特徴の1つであると考えられる。部分ノード集合を限定することにより、この傾向は弱まることを例題を通して考察した。又、この傾向を考慮した上で、各DMUの部門ノードの効率性をも評価するアプローチを考察検討した。

参考文献

[1] 茂木 渉：意思決定法に関する研究、平成21年度日本大学大学院生産工学研究科修士論文(2010.3).

[付録１]ノード重要度x_1, x_2, x_3の陽表現式(例1と例2)

マルコフ連鎖の平衡方程式は（A1-1）で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \qquad\quad + P_{21}x_2 + P_{31}x_3 \\ x_2 &= P_{12}x_1 \qquad\quad + P_{32}x_3 \\ x_3 &= P_{13}x_1 + P_{23}x_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{(A1-1)}$$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$と正規化することにより、以下を得る。

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (1 - P_{23}P_{32})/\Delta \\ x_2 &= (P_{12} + P_{13}P_{32})/\Delta \\ x_3 &= (P_{13} + P_{12}P_{23})/\Delta \\ \Delta &= 2 + P_{12}P_{23} + P_{13}P_{32} - P_{23}P_{32} \end{aligned}\right\} \quad \text{(A1-2)}$$

但し、P_{ij}は以下の通り。

$$\left.\begin{aligned} P_{12} &= \frac{q_1}{q_1+q_3}, \ P_{13} = \frac{q_3}{q_1+q_3} \\ P_{21} &= \frac{q_2}{q_2+q_5}, \ P_{23} = \frac{q_5}{q_2+q_5} \\ P_{31} &= \frac{q_4}{q_4+q_6}, \ P_{32} = \frac{q_6}{q_4+q_6} \end{aligned}\right\} \quad \text{(A1-3)}$$

[付録2]ノード重要度x_2, x_3の陽表現式(例3と例4)

（A1-1）おいて、$x_2 + x_3 = 1$と正規化することにより以下を得る。

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= (P_{12} + P_{13}P_{32})/(1 + P_{13}P_{32} + P_{12}P_{23}) \\ x_3 &= (P_{13} + P_{12}P_{23})/(1 + P_{13}P_{32} + P_{12}P_{23}) \end{aligned}\right\} \quad \text{(A2-1)}$$

表2:例1の評価結果

k		1	2	3	4	5
DEA効率値=MaxR_k		0.9974	1.0	1.0	0.8752	1.0
Max達成時評価ベクトル		(121212)	(111111),他全部で44	(111121)他全部で12	(212212)	(121111),他全部で7
Max達成時部門別絶対効率値	f_{1k}	1.833	0.75	2.0	0.667	2.25
	f_{2k}	0.857	1.6	0.714	3.5	0.6
	f_{3k}	0.982	0.67	0.714	0.571	0.8
Max達成時ノード重要度	x_{1k}	0.304	0.242	0.292	0.392	0.286
	x_{2k}	0.314	0.417	0.333	0.2	0.357
	x_{3k}	0.382	0.341	0.376	0.408	0.357
Max達成時全体絶対効率値		0.982	0.988	0.965	0.872	0.984

表4:例２の評価結果

k		1	2	3	4	5
DEA効率値=MaxR_k		1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
Max達成時評価ベクトル		(111211) 他全部で15	(111121) 他全部で20	(111111) 他全部で16	(111212) 他全部で5	(111112) 他全部9
Max達成時部門別絶対効率値	f_{1k}	1.0	0.75	1	1	1.333
	f_{2k}	1	1.4	1	1	0.8
	f_{3k}	1	0.8	1	1	1
Max達成時ノード重要度	x_{1k}	0.308	0.259	0.333	0.333	0.229
	x_{2k}	0.308	0.416	0.25	0.267	0.343
	x_{3k}	0.384	0.324	0.417	0.4	0.429
Max達成時全体絶対効率値		1	0.993	1	1	0.989

表6:例３の評価結果

k		1		2		3		4		5	
DEA効率値=MaxR_k		0.648		1.0		0.842		1.0		0.705	
Max達成時評価ベクトル		(211122)		(111111)他全部で43		(111221)		(111112)他全部21		(221121)	
Max達成時部門別絶対効率値	f_{1k}	4		0.75		1.14		0.444		2.25	
	f_{2k}	0.75		1.6		0.71		4.67		0.8	
	f_{3k}	0.5		0.67		1.14		0.45		0.7	
Max達成時ノード重要度	x_{1k}	0.190		0.242		0.334		0.348		0.25	
	x_{2k}	0.391	0.483	0.417	0.55	0.3	0.45	0.248	0.38	0.375	0.5
	x_{3k}	0.419	0.517	0.341	0.45	0.366	0.55	0.404	0.62	0.375	0.5
Max達成時全体絶対効率値		0.608		1.079		0.92		1.1		0.739	

表8:例４の評価結果

k		1		2		3		4		5	
DEA効率値=MaxR_k		0.9317		1.0		1.0		0.7853		0.949	
Max達成時評価ベクトル		(211122)		(111111)他全部で48		(111211)他全部16		(111212)		(211112)	
Max達成時部門別絶対効率値	f_{1k}	1.667		0.75		0.571		1		1.667	
	f_{2k}	0.75		1.0		1.0		1		0.7	
	f_{3k}	1.0		1.33		1.6		1		1	
Max達成時ノード重要度	x_{1k}	0.194		0.315		0.381		0.333		0.227	
	x_{2k}	0.414	0.513	0.414	0.6	0.2	0.32	0.267	0.4	0.364	0.471
	x_{3k}	0.392	0.487	0.271	0.4	0.419	0.68	0.4	0.6	0.409	0.529
Max達成時全体絶対効率値		0.863		1.121		1.37		1.0		0.826	