

複式簿記理論の位相幾何学的考察（その6）

－マルコフ連鎖定常状態確率ならびに固有ベクトルによる勘定ノードの重要度推定－

日大生産工 ○篠原正明

情報システム研究所 篠原健

1. はじめに

節点（勘定ノード）が勘定科目に対応し、有向枝（取引）には取引額が付随した取引ネットワークにおいて、各勘定ノードの重要度を表わす勘定科目ウェイトを推定するために、

（1） 勘定ノード間取引 T を行毎に総和が 1 となるように
正規化した確率行列 P の定常状態確率を用いる方法

（2） 取引行列 T の左主固有ベクトルを用いる方法
の 2 つのアプローチを提案し、両者を比較する。

2. 複式簿記システムの取引ネットワーク

現金①、原料②、製品③、資本④の 4 つの勘定ノードからなる取引ネットワーク（図 1）を考えよう。例えば、取引枝 t_{12} は原料の現金購入を表現し、 t_{12} はその購入額である。取引枝 t_{23} は原料消費による製品生産を表現し、 t_{23} はその消費額である。ノード数 = 4 の取引ネットワークでは、枝の向きを考慮すると総計で 12 個の取引枝 t_{ij} が存在し、その取引額は非負値と仮定する ($t_{ij} \geq 0$)。

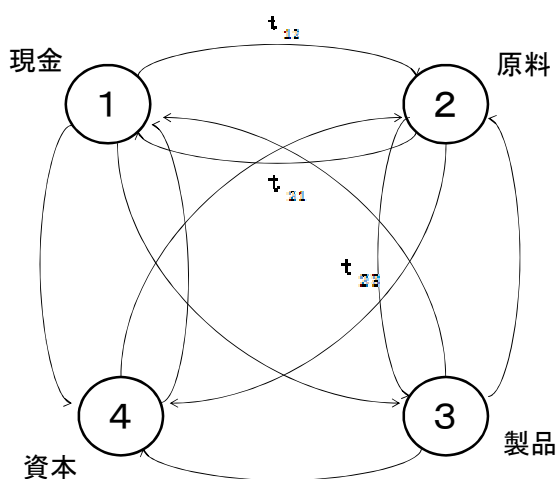


図 1：取引ネットワークの例

取引枝 t_{ij} の中には原理的に存在しないものも存在するが、その時は $t_{ij}=0$ と、また、負の取引額 ($t_{ij} \leq 0$) の場合には、 $t_{ij}=0$ とした後、反対方向の取引枝 (t_{ji}) にその分を加算すればよい ($t_{ji} \leftarrow t_{ji} + |t_{ij}|$)。

3. 取引ネットワークにおける金銭の流れ

例えば、勘定ノード「現金①」には 3 つの取引枝 t_{21}, t_{31}, t_{41} が入力し、 t_{12}, t_{13}, t_{14} の 3 つの取引枝が出力する。入力枝 t_{21} は原料販売による現金収入原価、入力枝 t_{31} は製品販売による現金収入原価、入力枝 t_{41} は現金収入利益を各々表わしている。

いずれも、勘定ノード「現金①」部門を維持するためには必要な取引であるが、現金勘定部門の効率性の観点からは少額であることが望まれる。一方、出力枝 t_{12} は原料購買による現金支出、出力枝 t_{13} は製品購買による現金支出、出力枝 t_{14} は資本の一部現金支出を各々表わしている。いずれも勘定ノード「現金①」部門を活用する取引ではあるが、現金勘定部門の効率性の観点からは、多額であることが望まれる。すなわち、現金勘定部門としては、より少ない現金収入取引フローで、より多くの現金支出取引フローを処理（取り扱う）するのが効率的と考える（但し、現金ストックは減少するだろうが）。

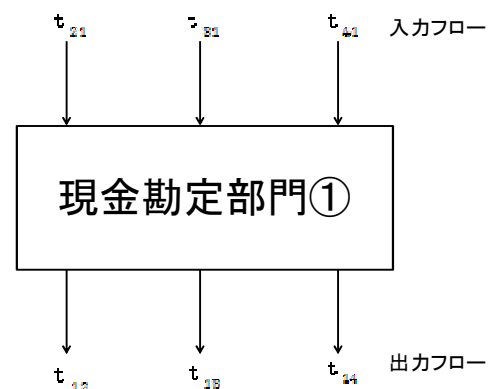


図 2：勘定ノード「現金①」に注目したキャッシュフロー

以上に説明したように、ある取引（例えば、原料購買現金支出

Topological Consideration on Double-entry Bookkeeping System

－Part 6: Account Node Weight Estimation via Stationary State Probability and Eigenvector－
Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

t_{12} の取引額増加は、現金部門としては出力増加による成果向上となるが、原料部門としては入力増加による負担増となってしまう。すなわち、複式簿記システム全体としての効率性を論じるためには、キャッシュフローがどの部門にどの程度滞り循環しているかを定量化した勘定ノードの重要度（勘定科目ウェイト）を推定する必要がある。

4. 勘定ノードの重要度推定法

勘定科目ウェイトを推定する2つの方法を以下に説明する。

4. 1 定常状態確率ベクトル法 $T = \{t_{ij}\}$ を取引行列とした時に、行毎に総和が1となるように正規化した確率行列を $P = \{p_{ij}\}$ とする。 $p_{ij} = t_{ij} / \sum_j t_{ij}$ (1)

$t_{ij} \geq 0$ と仮定しているので、 $p_{ij} \geq 0$ 、 $\sum_j p_{ij} = 1$ となり、行列 P はマルコフ連鎖の状態間遷移確率行列となる。すなわち、取引額 t_{ij} が多ければ、状態 i から状態 j へそれ相当のキャッシュが流れていると考え、キャッシュの移動する確率 p_{ij} もそれに比例すると考える。取引額 t_{ij} はキャッシュフロー値であり、マルコフ連鎖の立場からは状態 i から状態 j への確率フロー値 $x_i p_{ij}$ に対応する。従って、もし $\{t_{ij}\}$ が確率フローとしての性質（例えば、勘定ノードでの保存則）を満足すれば $t_{ij} = x_i p_{ij}$ かつ $\sum_j p_{ij} = 1$ より、 $x_i = \sum_j t_{ij}$ (2) を得る。すなわち、状態 i の定常状態確率 x_i は、勘定ノード i から出る取引額の総和 $\sum_j t_{ij}$ に比例する。一般には t_{ij} と $x_i p_{ij}$ は、厳密には対応しないので、確率行列 P の定常状態確率ベクトル $\mathbf{x}$ （列ベクトル）を求め、それを状態 i の重要度（勘定科目ウェイト）とする。定常状態確率ベクトル $\mathbf{x}$ とは、(3)、(4) を満たす $\mathbf{x}_0$ であり、平衡確率ベクトルとも言う。

$$P^T \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 \quad (3), \quad \mathbf{1}^T \mathbf{x}_0 = 1 \quad (4)$$

非周期的マルコフ連鎖では、 $\mathbf{x}_0$ は確率行列 P をべき乗することにより得られる極限確率ベクトル $\mathbf{x}(\infty)$ と一致する。

$$\mathbf{x}(\mathbf{k}) = P^T \mathbf{x}(\mathbf{k}-1) \quad (5)$$

$$\mathbf{x}(0) : \text{適当な初期確率ベクトル} \quad (6)$$

4. 2 固有ベクトル法

(3) 式を転置すると、(7) を得る。

$$\mathbf{x}_0^T P = \mathbf{x}_0^T \quad (7)$$

すなわち、確率行列 P に対応する $\mathbf{x}_0$ は行列 P の固有値1の左主固有ベクトルに対応する。取引行列 T についても同様に考えることにより、(8) 式を満たす $\mathbf{w}$ をウェイトベクトルとする。

$$\mathbf{w}^T T = \lambda \mathbf{w}^T \quad (8)$$

$$T^T \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w} \quad (9)$$

すなわち、取引行列 T の左主固有ベクトル、あるいは、転置し

た取引行列 T^T の右主固有ベクトルを求める。このように、状態 k の重要度ウェイト w_k として、固有ベクトルの要素が広く採用される理由としては、注目する状態 k のウェイト w_k は、状態 j との取引額 t_{jk} と状態 j のウェイト $w_j (j=1,2,\dots,n)$ と (10) 式で関係づけられると考えられるからである。

$$\lambda w_k = (w_1 t_{1k}) + (w_2 t_{2k}) + \dots + (w_n t_{nk}) \quad (10)$$

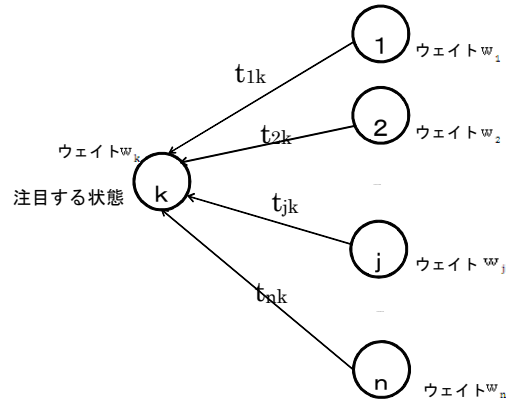
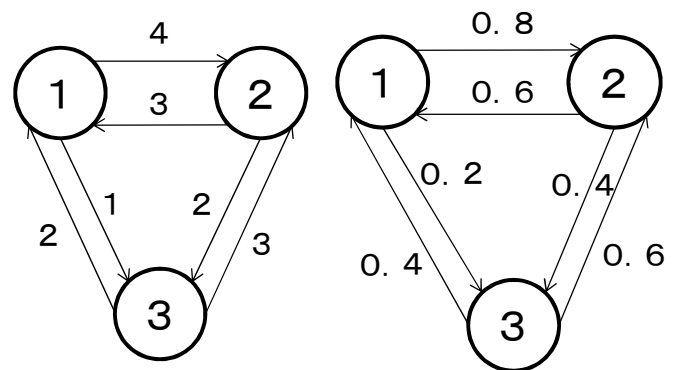


図3：固有ベクトル法の一般概念（パス代数）

5. ウェイト推定例

【例1】ノード数 $n=3$ 、出力フロー和一定（その1）



(a) 取引ネットワーク (b) 対応する確率ネットワーク

図4：例1のネットワーク

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

取引行列 T の各行和（出力フロー）が5に等しい例である。定常状態確率ベクトル $\mathbf{x}$ と固有ベクトルウェイト $\mathbf{w}$ は以下の通り。

$$\mathbf{x} = (19/55, 23/55, 13/55)^T \approx (0.3454, 0.4181, 0.2363)^T \quad (1.3)$$

$$\mathbf{w} = \left(\frac{19}{55}, \frac{23}{55}, \frac{13}{55} \right)^T \quad (1.4)$$

$$\text{固有値: } \lambda = 5 \quad (1.5)$$

すなわち、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{w}$ は一致し、主固有値 λ が出力フロー和 = 5 と

なる。

[例2]ノード数 $n=3$ 、出力フロー和一定（その2）

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0.75 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

取引行列 T の各行和が4に等しい例である。 $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{w}$ 、 λ は以下

の通り。 $\mathbf{x} = (10/37, 14/37, 13/37)^T \doteq (0.27, 0.378, 0.351)^T$ (18)

$$\mathbf{w} = (10/37, 14/37, 13/37)^T \quad (19)$$

$$\lambda = 4 \quad (20)$$

$\mathbf{x}$ と $\mathbf{w}$ は一致し、固有値 λ は出力フロー和 = 4 となる。

[例3]ノード数 $n=3$ 、出力フロー和一定、負取引有

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1.25 & -0.25 \\ 0.25 & 0 & 0.75 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

取引行列 T の各行和が4に等しいが、 $t_{13}=-1$ と負取引が含まれる。 $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{w}$ は以下の通り ($\lambda=4$)。

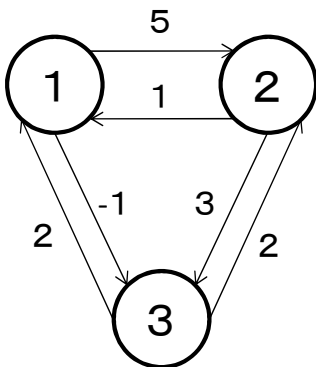
$$\mathbf{x} = \left(\frac{10}{39}, \frac{6}{13}, \frac{11}{39} \right)^T \quad (23) \quad \mathbf{w} = \left(\frac{10}{39}, \frac{6}{13}, \frac{11}{39} \right)^T \quad (24)$$

負値混入でも、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{w}$ は一致し、固有値 λ は出力フロー和 = 4 となる。そこで、負取引 $t_{13}=-1$ を零とし、正取引 t_{31} に $|t_{13}|$ だけ加算して、 $t_{31}=2+1=3$ とした例を次に考える。

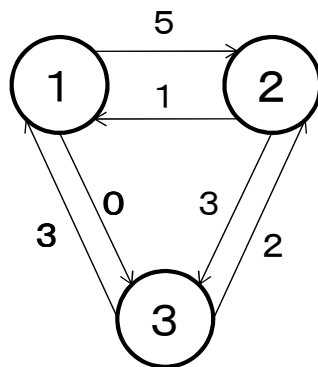
[例4]ノード数 $n=3$ 、負取引を正取引に変換

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.75 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$



(a) 例3の取引ネットワーク
(負取引混在)



(b) 例4の取引ネットワーク
(負取引を0として、
向き逆転)

図4：負取引の正取引への変換例

図4 (b) のネットワークでは $t_{13}=0$ 、 $t_{31}=3$ 、である。

$\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{w}$ 、 λ は以下の通り。

$$\mathbf{x} = (2/7, 20/49, 15/49)^T \doteq (0.2857, 0.4081, 0.3061)^T \quad (27)$$

$$\mathbf{w} = (11/39, 13/30, 2/7)^T \doteq (0.2819, 0.4333, 0.2847)^T \quad (28)$$

$$\lambda = 4 \frac{17}{30} \doteq 4.5666 \quad (29)$$

$\mathbf{x} \neq \mathbf{w}$ であり、例3の結果 (23)、(24) と同傾向の値であるが一致はしない。

[例5]ノード数 $n=3$ 、入出力フロー値保存

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

ノード1での入力フロー和=出力フロー和=5

ノード2での入力フロー和=出力フロー和=6

ノード3での入力フロー和=出力フロー和=4 である。

$\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{w}$ 、 λ は以下の通り。

$$\mathbf{x} = (1/3, 2/5, 4/15)^T \doteq (0.333, 0.4, 0.266)^T \quad (32)$$

$$\mathbf{w} = (1/3, 26/69, 19/66)^T \doteq (0.333, 0.3767, 0.2879)^T \quad (33)$$

$$\lambda \doteq 5.08875 \quad (34)$$

この場合は、取引フローが確率フローの条件を満足し

ているので、4.1節で述べた(2)式 ($\lceil x_i$ と $\sum_j t_{ij}$ が比例) が成立することが予想される。

$$\sum_j t_{1j} : \sum_j t_{2j} : \sum_j t_{3j} = 5 : 6 : 4 \quad (35)$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{5}{15} : \frac{6}{15} : \frac{4}{15} \quad (36)$$

よって、予想が成立することが確認できた。

[例6] ノード数 $n=3$ 、出力フロー和非一定（第2行和=6、それ以外5）

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (37) \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

$\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{w}$ 、 λ は以下の通り。

$$\mathbf{x} \doteq (0.3153, 0.4144, 0.27)^T \quad (39)$$

$$\mathbf{w} \doteq (0.3239, 0.3959, 0.28)^T \quad (40)$$

$$\lambda \doteq 5.396 \quad (41)$$

$\mathbf{x} \neq \mathbf{w}$ であり、固有値も5以上で和の平均値 5.333 に近似する。

[例7]ノード数 $n = 3$ 、出力フロー和一定 (第2行和 = 4、それ以外5)

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2) \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{w}$ 、 λ は以下の通り。

$$\mathbf{x} \doteq (0.3917, 0.4239, 0.1843)^T \quad (4.4)$$

$$\mathbf{w} \doteq (0.3733, 0.4466, 0.18)^T \quad (4.5)$$

$$\lambda \doteq 4.55 \quad (4.6)$$

$\mathbf{x} \neq \mathbf{w}$ であり、固有値も5以下で行和の平均値 4.667 に近似する。

[例8]ノード数 $n = 3$ 、入力フロー和一定 (その1)

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7) \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0.6923 & 0.3077 \\ 0.333 & 0 & 0.667 \\ 0.875 & 0.125 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

$\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{w}$ 、 λ は以下の通り。

$$\mathbf{x} \doteq (0.3793, 0.3024, 0.3183)^T \quad (4.9)$$

$$\mathbf{w} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)^T \quad (5.0)$$

$$\lambda = 10 \quad (5.1)$$

$\mathbf{x} \neq \mathbf{w}$ であり、 λ は各入力フロー和 = 10 に一致する。

また、 $\mathbf{w}$ の各要素は $\frac{1}{3}$ で皆等しい。一般に $n \times n$ 行列 T において、各列和が皆 c に等しいとするならば、

$$\mathbf{w} \doteq \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)^T \quad (5.2) \quad \lambda = c \quad (5.3)$$

が成立する (証明は付録参照)。

[例9]ノード数 $n = 3$ 、入力フロー和一定 (その2)

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4) \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0.677 & 0.333 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

$\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{w}$ 、 λ は以下の通り。

$$\mathbf{x} \doteq (0.415, 0.302, 0.283)^T \quad (5.6)$$

$$\mathbf{w} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)^T \quad (5.7)$$

$$\lambda = 5 \quad (5.1)$$

例8と同様な結果が観測できる。

6. おわりに

マルコフ連鎖定常状態確率ベクトル $\mathbf{x}$ ならびに、固有ベクトル $\mathbf{w}$ を用いた勘定ノードの重要度推定法を提案し、例題により諸性質を調べ、以下の結果が理論上も判明した。

(i) 出力フロー和一定の取引ネットワークでは、 $\mathbf{x} = \mathbf{w}$ が成立し、固有値 λ = 出力フロー和となる。

(ii) 入力フロー和一定の取引ネットワークでは、一般に $\mathbf{x} \neq \mathbf{w}$ だが、 λ = 入力フロー和、又 $\mathbf{w} =$

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)^T.$$

(iii) 各ノード i で出力フロー和 = 入力フロー和 (= S_i) の取引ネットワークでは、 $\mathbf{x}$ の要素 x_i は S_i に比例する。

付録 (5.2) 式の証明

行和 = 1 $\left(\sum_j P_{ij} = 1 \right)$ の $n \times n$ 確率行列 P において、定

義より (A・1) が成立する。

$$P \mathbf{1} = \mathbf{1} \quad (A \cdot 1)$$

すなわち $\mathbf{1}$ は P の右固有ベクトルで、対応する固有値は 1

である。但し、 $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$ で、 $\mathbf{1}$ を和が 1 になるよ

うに正規化すれば (A・2) を得る。

$$\text{正規化した } \mathbf{1} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)^T \quad (A \cdot 2)$$

(Q. E. D.)