

MPS法による液封式ポンプの数値解析

日大生産工(院) ○丑山 芳秀 日大生産工 角田 和彦
日大生産工 豊谷 純

1. はじめに

粒子法は、差分法や有限要素法といった格子を用いた計算法とは異なり、速度や圧力を保持しながら移動する粒子を用いて連続体の挙動を計算するメッシュレス法である。そのため、自由表面や界面の大変形を伴う解析に広く利用される¹⁾。

本研究では、粒子法的一种であるMPS法(Moving Particle Semi-implicit Method)を用いて、液封式ポンプ内の流体^{2), 3)}の数値解析を行い、得られた解析結果を可視化したものと、実際のポンプ内の気液界面とを比較することで、MPS法の有用性を示すことを目的とする。

2. 支配方程式

非圧縮性流れの支配方程式は以下の式で示される。

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\nabla^2 u + g \quad (2)$$

式(1)は質量保存則で、連続の式と呼ばれるものである。式(2)は運動量保存則を表すナビエーストークス方程式である。式(2)の左辺は速度ベクトルに対するラグランジュ微分である。また、右辺第1項は圧力勾配項、第2項は粘性項、第3項は重力項である。

3. 粒子間相互作用モデル

MPS法では、微分方程式に表れる微分演算子である勾配、ラプラシアンなどに対してそれぞれ粒子間相互作用モデルを用意し、これらを用いることで支配方程式の離散化を行う。

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 & (0 \leq r < r_e) \\ 0 & (r_e \leq r) \end{cases} \quad (3)$$

式(3)は各粒子間における相互作用(図1)の有無を決める、重み関数である。

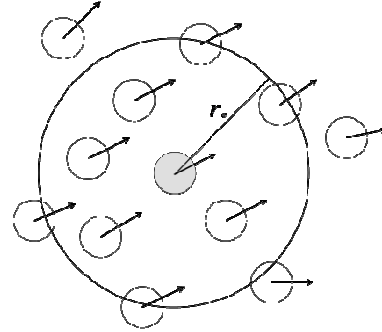


図1 粒子間相互作用

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{\phi_j - \phi_i}{|r_j - r_i|^2} (r_j - r_i) w(|r_j - r_i|) \right] \quad (4)$$

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \frac{2d}{\lambda n^0} \sum_{j \neq i} [(\phi_j - \phi_i) w(|r_j - r_i|)] \quad (5)$$

$$\lambda = \frac{\sum_{j \neq i} |r_j - r_i| w(|r_j - r_i|)}{\sum_{j \neq i} w(|r_j - r_i|)} \quad (6)$$

式(4)は勾配モデルで、また、式(5)はラプラシアンモデルである。式(6)はラプラシアンモデルにおいて、統計的な分散の増加を解析解と一致させるための係数である。ここで、 d と n^0 はそれぞれ次元数、重み関数の和で表される粒子数密度の一定値である。

4. 半陰的アルゴリズム

非圧縮性流れの計算アルゴリズムとして、SMAC(Simplified MAC)のような半陰的なアルゴリズムを適用する。全体のアルゴリズムを図2に示す。

Numerical Analysis of a Liquid Ring Pump Using a Moving Particle
Semi-implicit Method

Yoshihide USHIYAMA, Kazuhiko KAKUDA and Jun TOYOTANI

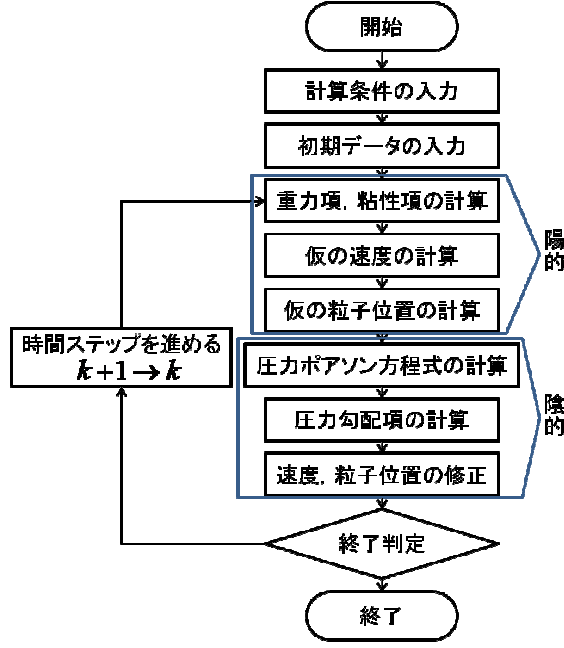


図 2 計算アルゴリズム

計算の流れとしては、式(1), (2)に対して各時間ステップでの計算の開始段階にて、時刻 k における各粒子の位置 r^k 、速度 u^k 、圧力 P^k の値が決まっているものとして次の時刻 $k+1$ での位置 r^{k+1} 、速度 u^{k+1} 、圧力 P^{k+1} を計算する。各時間ステップの計算は陽的な部分と陰的な部分に分けて行われる。ナビエーストークス方程式の粘性項と重力項を陽的に（時刻 k の値で）、圧力勾配項と連続の式を陰的に（時刻 $k+1$ の値で）計算する。

$$\left[\frac{D\rho}{Dt} \right]^{k+1} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{Du}{Dt} = - \left[\frac{1}{\rho} \nabla P \right]^{k+1} + [\nu \nabla^2 u]^k + [g]^k \quad (8)$$

式(8)の粘性項と重力項を陽的に計算し、粒子の仮の速度 u^* と仮の位置 r^* を得る。

$$u^* = u^k + \Delta t [\nu \nabla^2 u + g]^k \quad (9)$$

$$r^* = r^k + \Delta t u^* \quad (10)$$

流体の密度と粒子数密度の比例関係から、連続の式(7)の密度一定条件を粒子数密度一定条件とする。式(9)と式(10)の陽的な計算が終了した段階での粒子数密度を n^* とし、次の陰的な部分の計算において n^* を一定値 n^0 に戻すことを考える。このとき、時刻 $k+1$ での粒子の位置、速度、圧力が修正される。

$$n^0 = n^{k+1} = n^* + n' \quad (11)$$

$$u^{k+1} = u^* + u' \quad (12)$$

$$r^{k+1} = r^* + \Delta t u' \quad (13)$$

ここで、 n' は粒子数密度の修正量、 u' は速度の修正量である。 u' は陰的な圧力勾配により生じるものとする(式(14))。

$$u' = - \frac{\Delta t}{\rho_0} \nabla P^{k+1} \quad (14)$$

$$\frac{1}{n_0} \frac{Dn}{Dt} + \nabla \cdot u = 0 \quad (15)$$

式(15)は圧縮性流れの質量保存則を一定値 ρ_0 で近似し、密度と粒子数密度の比例関係により密度を粒子数密度で書きかえたものである。ここで、 n' は u' により生じるものとし、同時に時間に対して離散化をする(式(16))。

$$\frac{n'}{n^0 \Delta t} + \nabla \cdot u' = 0 \quad (16)$$

式(14)の発散をとったものを、式(16)に代入することで圧力のポワソン方程式を得る(式(17))。

$$\nabla^2 P^{k+1} = - \frac{\rho_0}{\Delta t^2} \frac{n^* - n^0}{n^0} \quad (17)$$

式(16)の左辺を各粒子においてラプラシアシオンモデルで離散化を行うと、未知数 P_i^{k+1} についての連立一次方程式が得られる(式(18))。

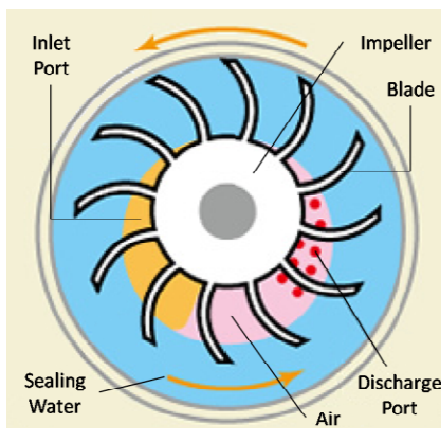
$$\langle \nabla^2 P \rangle_i^{k+1} = \frac{2d}{\lambda n^0} \sum_{j \neq i} [(P_j^{k+1} - P_i^{k+1}) w(|r_j^* - r_i^*|)] \quad (18)$$

この連立一次方程式を解くことで、新しい時刻 $k+1$ での圧力が求まる。この圧力を式(14)に代入すると速度の修正量 u' が得られ、これを式(12)、式(13)に代入することで新しい時刻 $k+1$ での速度と位置が決定する。

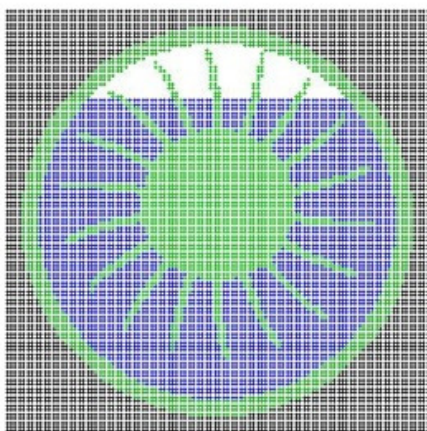
5. 計算モデル

今回モデルとして使用したポンプは、羽根12枚により構成される羽根車が反時計回りに回転運動を行うものである。ポンプ内の羽根車は、円状の内壁の中心よりやや上側の偏心したところに位置しているため、内壁と上側と回転する羽根の間がとて近しい構造となっている(図3(a))。

計算に使用した初期状態での粒子配置を図3(b)に示す。ポンプ全体を構成する粒子数は全部で9527粒子であり、羽根の角度がモデルよりやや真つすぐなのは、細かい角度をつけるためには今回の粒子数では限界があったためである。羽根車の回転速度については、徐々に加速させていき、最終的な上限を2400rpmとした。



(a)形状構成

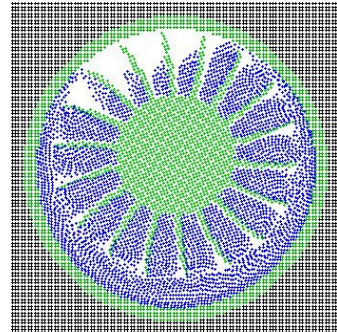


(b)初期粒子配置

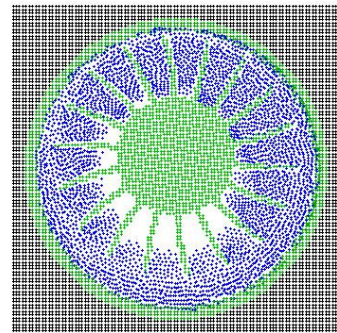
図 3 液封式ポンプ概形

6. 解析結果

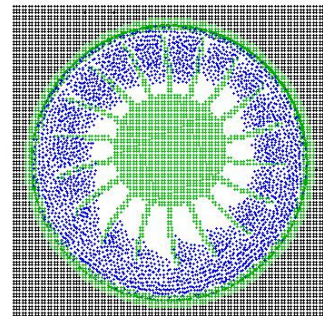
図4(a)～(d)は、それぞれ時刻5ms, 20ms, 200ms, 449msでの粒子挙動を可視化したものである。



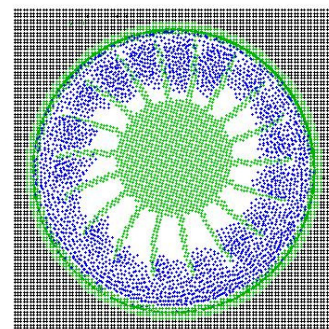
(a)time ≅ 5ms



(b)time ≅ 20ms



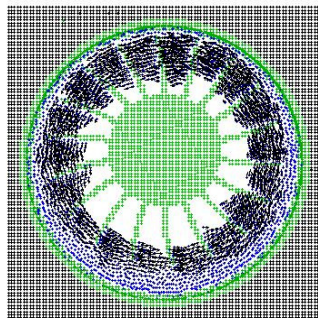
(c)time ≅ 200ms



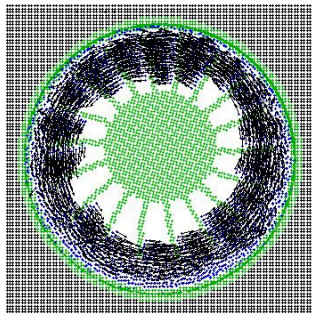
(d)time ≅ 449ms

図 4 粒子挙動の可視化

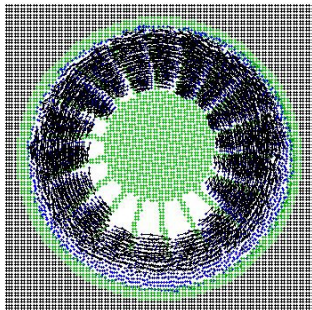
また、図 5 (a)～(d)は、それぞれ時刻5ms, 20ms, 200ms, 449msでの速度ベクトル場を可視化したものである。



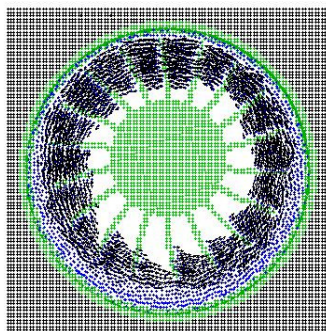
(a)time $\cong$ 5ms



(b)time $\cong$ 20ms



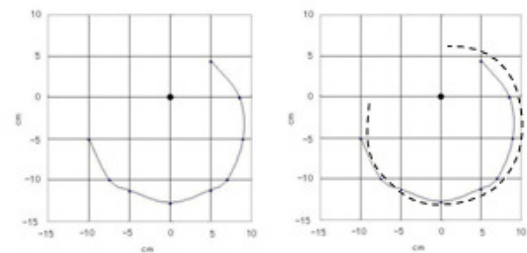
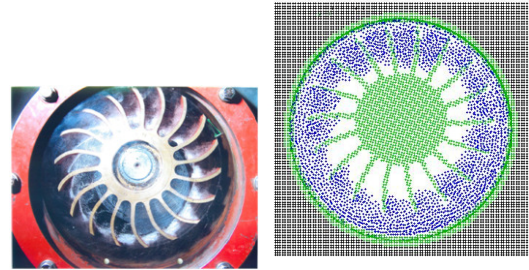
(c)time $\cong$ 200ms



(d)time $\cong$ 449ms

図 5 速度ベクトルの可視化

図 6 は、今回の解析結果より得られた気液界面の曲線(図 6 (b)の点線)を、実験データ^{2), 3)}(図 6 (b)の実線)と比較したものである。本結果と実験データとの一致が見られる。



(a)実験

(b)MPS法

図 6 気液界面の比較

7. おわりに

本研究では、MPS法によって液封式ポンプ内の流動に関する数値解析を行った。結果として、図 6 から数値結果を実験データと比較して良い一致が得られた。これにより、MPS法が急激な挙動を有する流れの解析に向けた手法だということを確認することができた。

今後の課題として、粒子数を増やすことで羽根の形状をより詳細に作成することや、粒子数増加に伴う計算時間の短縮のため、GPUを利用した演算の高速化を検討し、その演算性能を評価することも行っていきたい。

参考文献

- 1)越塚誠一,「粒子法」日本計算工学会編 丸善株式会社, (2005), pp. 8-25.
- 2)佐藤洋平, 角田和彦, 登坂宣好, 松田正平, “液封式ポンプ内の流動解析” 日本大学生産工学部 学術講演会 数理情報部会 (2004), 7-22
- 3)藤田優, 石井進, 山崎智史, 由永達郎 “一作動型液封式ポンプにおける気液界面の可視化” 日本機械学会講演論文集 (2003), 40-41