

無条件安定陽解法のパネ-質点モデルへの応用

日大生産工(院) ○藤井 祐司 日大生産工 吉田 典正
日大生産工 齋藤 敏雄 神田 亮 東邦大・理 新谷 幹夫

1. はじめに

建築物や布などの各種シミュレーションでは一般に、運動を微分方程式で表現し、数値積分を行うことによって各ステップにおける位置や速度などの情報を計算する。数値積分を行う際には、発散や振動が生じない安定性と各ステップの計算効率が問題になる。

シミュレーションに利用される数値積分は、大きく分類すると陽解法と陰解法に分けられる。陽解法は現時点の情報から次のステップの解を求める手法である。1 ステップあたりの計算時間は短い、シミュレーションの時間間隔 Δt を大きくすると解が発散し易い。陽解法では発散や振動が生じないように十分に Δt を小さく取らねばならず、その結果非常に多くのステップ、即ち多くの計算時間を必要とする場合がある。

陰解法は、現時点と次の時点での情報を使って連立方程式を立て、その方程式を解くことによって解を求める。陰解法は解が安定し発散しにくい、連立方程式を解くために逆行列を計算しなければならず、1 ステップあたりの計算時間は長い。そのためある時点までの状態を求めるためのステップ数は陽解法に比べて少ないが、適切に実装を行わなければ陽解法よりもシミュレーション全体の時間が長くなる場合がある。現在、コンピュータグラフィックス(CG)では共役勾配法¹⁾や GPU を用いて計算する²⁾など、陰解法を高速に解くための工夫が行われている。

本研究で扱う無条件安定陽解法は、陽解法

と陰解法の長所である安定性と計算効率を持っており、シミュレーション全体の時間が他の手法と比べて短くなることが期待される。本研究ではパネ-質点モデルに無条件安定陽解法を適用する。

2. 無条件安定陽解法

Newmark β 法の式を次に示す。

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{K}\mathbf{d}_{n+1}) \quad (1)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{1}{2}(\Delta t)(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}) \quad (2)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \beta_1(\Delta t)\mathbf{v}_n + \beta_2(\Delta t)^2\mathbf{a}_n + \beta_3(\Delta t)^2\mathbf{a}_{n+1} \quad (3)$$

ここで $\mathbf{d}$ は変位、 $\mathbf{v}$ は速度、 $\mathbf{a}$ は加速度、 $\mathbf{f}$ は外力を表し、 $\mathbf{M}$ は質量、 $\mathbf{C}$ は減衰、 $\mathbf{K}$ は剛性を表す。 n は現在、 $n+1$ は次の状態を表す。変数 β_3 が0である場合、式(3)は陽解法であり、0以外の場合は陰解法となる。例えば、変数 β_1 が1、 β_2 が1/2、 β_3 が0の場合は陽のNewmark β 法と呼ばれ、 β_1 が1、 β_2 が1/4、 β_3 が1/4の場合は平均加速度法と呼ばれる。これらの数値積分の関係を行列の形式で表すと次のようになる。

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^{n+1}\mathbf{x}_0 \quad (4)$$

ここで $\mathbf{x}$ は変位と速度、加速度を含んだベクトルを表す。現時点のベクトルから次の時点のベクトルを計算する行列 $\mathbf{A}$ の最大固有値が1以下なら、計算される数値は発散せずに安定する。無条件安定陽解法の式は、 β_3 を0とした式(3)のオーバーシュートと、常に行列 $\mathbf{A}$ の最大固有値が1以下となる平均加速度法のオーバーシュートとを比較することで求め、剛性と減衰が一意に定まれば β_1 、 β_2 を決める

ことができる．無条件安定陽解法の式を次に示す．

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \beta_1(\Delta t)\mathbf{v}_n + \beta_2(\Delta t)^2\mathbf{a}_n \\ \beta_1 &= \left[I + \frac{1}{2}(\Delta t)M^{-1}C + \frac{1}{4}(\Delta t)^2M^{-1}K_0 \right]^{-1} \left[I + \frac{1}{2}(\Delta t)M^{-1}C \right] \\ \beta_2 &= \left(\frac{1}{2} \right) \left[I + \frac{1}{2}(\Delta t)M^{-1}C + \frac{1}{4}(\Delta t)^2M^{-1}K_0 \right]^{-1} \end{aligned} \quad (5)$$

Δt がシミュレーション中に変わらない場合， β_1 と β_2 の計算は一度でよい．また，逆行列の計算を一度に抑えるために剛性マトリックスを初期剛性マトリックスで近似する．よって，無条件安定陽解法は一度だけ逆行列を求める必要があり，計算時間は陰解法より速く陽解法よりは遅いと予想できる．

3. 実行結果

Fig.1(a)に縦横 10 個ずつの質点をバネで接続し，最上部 1 辺を固定したバネ・質点モデルを示す．Fig.1(b)から(f)に無条件安定陽解法を適用したシミュレーションの様子を 2000 ステップごとに示す．

Fig.1 のシミュレーションと同じパラメータ，質点の配置で無条件安定陽解法の発散しない最大 Δt は 0.15 であった．無条件安定陽解法が発散する原因は，初期段階で非線形である剛性マトリックスと減衰マトリックスを線形として扱っており，その誤差が積み重なるためであると考えられる．

4. 他手法との比較

無条件安定陽解法がどの程度の安定性と計算効率があるか全体像から測定するために，陽解法や陰解法といった他手法との比較を行

う必要がある．陽解法にはオイラー法と陽の Newmark β 法を，陰解法には CG において頻繁に利用される共役勾配法を用いた Choi らの手法⁴⁾を適用する．Choi らの手法は，力を変位で微分することにより幾何学的非線形な剛性マトリックスを毎ステップ計算しているが，連立方程式を共役勾配法で解くので効率的な計算が可能である．現在，これらの他の手法を実装中であり，安定性および効率の観点から比較を行う予定である．

5. まとめ

本研究では，無条件安定陽解法をバネ・質点モデルのシミュレーションに実装し，その結果を示した．

今後の課題として，オイラー法や共役勾配法を適用した Choi らの手法等を実装し，無条件安定陽解法と比較することが挙げられる．

参考文献

- 1) D.Baraff, A.Witkin, “Large Steps in cloth simulation,” SIGGRAPH 1998, Conference Proceeding, pp.43-54, 1998.
- 2) E.Tejada, T.Ertl, “Large Steps in GPU-Based Deformable Bodies Simulation,” Simulation Modeling Practice and Theory, vol.13, pp.703-715, 2005.
- 3) Chang, S.Y. and Liao, W.I, “An Unconditionally Stable Explicit Method for Structural Dynamics”, Journal of Earthquake Engineering, Vol.9 No.3, pp.349-370, 2005.
- 4) K.D.Choi, H.S.Ko. “Stable but responsive cloth,” ACM Transactions on Graphics, vol.21, no.3, pp.604-611, 2002.

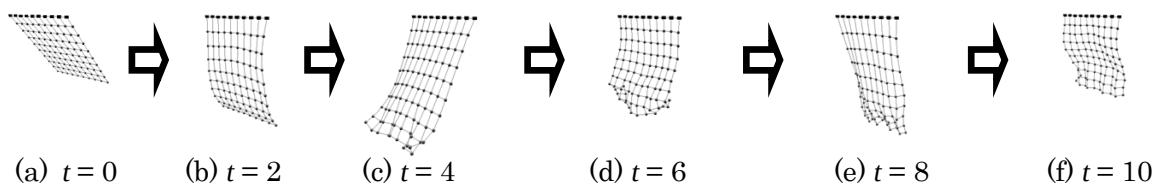


図 1 2000 ステップごとのシミュレーションの様子($\Delta t = 0.001$)