

指数関数を用いた対数美的曲線の B-spline 近似

日大生産工 (院) ○福田 諒 日大生産工 吉田 典正 齋藤 敏雄
東京農工大・生物システム応用科学 齋藤 隆文

1 はじめに

対数美的曲線¹⁾は、曲率が単調に変化し曲率対数グラフが直線になる曲線である。現在 CAD システムで広く利用される自由曲線では曲線の接続や滑らかさの制御は比較的容易であるが、曲率変化の制御は困難である。対数美的曲線を自由曲線形式で表現することができれば、自由曲線形式の優れた性質を持ちながら曲率変化の制御が可能となる。

三浦らは、対数美的曲線式を離散化し自由曲線で近似的に表現する手法を提案した²⁾。この手法では、弧長の変化を一定にし離散化を行っている。しかし、弧長変化を一定にして離散化すると曲率が大きいところで制御点の間隔が広くなり、曲線の方向角の変化が小さくなるという問題がある。

本報告では、弧長変化を一定にして近似する手法に対し指数関数を用いて制御点間の距離を変化させ、曲率の大きいところにおいて密に制御点を配置する手法を提案する。

2 対数美的曲線の離散的表現

本節では、自由曲線形式による対数美的曲線の生成法について述べる。ここでは標準形による対数美的曲線式を用いる¹⁾。

弧長を s 、曲線の方向角を θ 、曲率対数グラフの傾きを α 、 $s = 0$ における $\frac{d\rho}{ds}$ を Λ (ρ は曲率半径) とする。弧長と方向角の関係式は

$$\theta = \begin{cases} \frac{1-e^{-\Lambda s}}{\Lambda} & \alpha = 0 \\ \frac{\log(\Lambda s + 1)}{\Lambda} & \alpha = 1 \\ \frac{(\Lambda \alpha s + 1)^{(1-\frac{1}{\alpha})} - 1}{\Lambda(\alpha - 1)} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

である。式 (1) を s について微分し $ds, d\theta$ を $\Delta s_i, \Delta \theta_i$ に置き換えると

$$\Delta \theta_i = \begin{cases} e^{(-\Lambda s_i)} \Delta s_i & \alpha = 0 \\ (\Lambda \alpha s_i + 1)^{(-\frac{1}{\alpha})} \Delta s_i & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

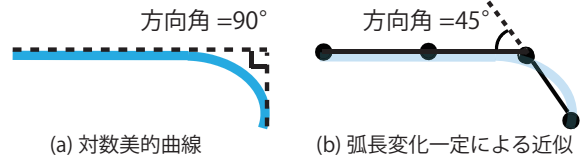


図 1 弧長変化を一定にして近似する手法の問題点

となる。

m 次の B-spline 曲線の n 個の制御点を $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ とし、 $\Delta b_i = b_{i+1} - b_i$ ($i = 0, \dots, n-2$) とする。 $\Delta s_i = |\Delta b_i|$ とし、 $\Delta \theta_i$ を Δb_i と Δb_{i+1} のなす角とする。曲線を生成するためには曲線の次数 m 、制御点の数 n 、 α, Λ, s を与える。弧長変化を一定にして近似する手法は Δs_i を一定として式 (2) を用いると、 b_i と b_{i+1} の角度が可変の制御ポリゴンを得る。また、両端点での位置と接線方向を指定する 3 つの制御点の指定から、対話的な制御をすることが可能である³⁾。

式 (2) の弧長変化を一定にして近似する手法は、Fig.1(a)(b) のように曲率が大きいところに制御点が配置されないため曲線の方向角の変化が小さくなる。このため対話的な制御の際、与えられた接線によって曲線を描画可能な場合が少なくなってしまうという問題がありなんらかの改善策が望まれる。

3 指数関数を用いた B-spline 近似

式 (2) の弧長変化を一定にして近似する手法の制御点の間隔を指数関数により変化させることで、曲率を考慮した制御点間の距離を持つ B-spline 曲線で対数美的曲線を近似する手法を示す。

指数関数を用いて Δs_i を変化した後の制御点の間隔を $\Delta \bar{s}_i$ とする。 $\Delta \bar{s}_i$ は式 (3),(4) から求めることができる。

$$s_{all} = \sum_{j=0}^{n-2} \Delta s_j \quad (3)$$

$$\Delta \bar{s}_i = s_{all} \cdot \left(\frac{\sum_{k=0}^i \Delta s_k}{s_{all}} \right)^{(1+\gamma)} - \sum_{j=0}^{i-1} \Delta s_j \quad (4)$$

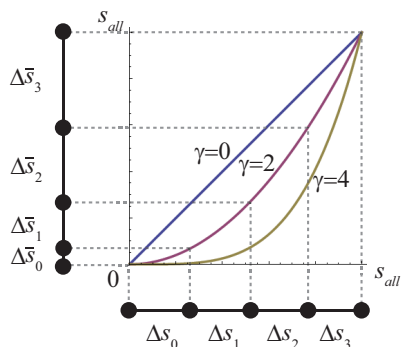


図2 式(4)による $\Delta \bar{s}_i$ の計算

Fig.2 に式(4)の計算によって得られる $\Delta \bar{s}_i$ の様子を示す．対数美的曲線は $\Lambda = 0$ の場合円弧を表現し， Λ が0より大きくなるほど曲率の変化率が大きくなる曲線である．従って， $\gamma = \Lambda$ とすることで $\gamma = 0$ のとき制御点を一定の間隔に与えることができ， $\gamma > 0$ のとき制御点の間隔を変化させることができる．

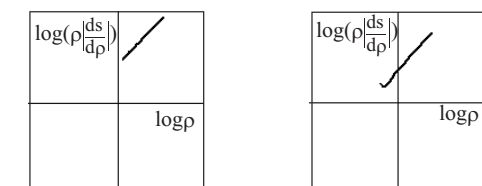
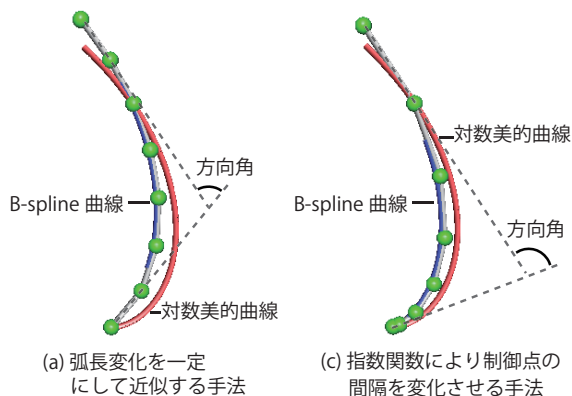
式(4)によって得られた $\Delta \bar{s}_i$ を Δs_i に置き換え，式(2)を用い $\Delta \theta_i$ を求めることで制御点の位置を計算する．

最後に，計算された制御点から一様 B-spline 曲線を生成する．文献³⁾と同様に両端点での位置と接線方向を3つの制御点から対話的に生成することや式(4)を用い対数美的空間曲線を近似することも可能である．

4 結果

Fig.3 に次数 $m = 4$ ，制御点の数 $n = 8$ ， $\alpha = 1$ ， $\Lambda = 1$ ， $s = 10$ の場合の弧長変化を一定にして近似する手法と本手法の結果を示す．また，その際の曲率対数グラフと対数美的曲線も示す．Fig.3(a)(c) から弧長変化を一定にして近似する手法にくらべ，本手法は曲率の大きいところに密に制御点が配置されていることがわかる．また本手法は方向角の変化を大きくとることができる．しかし，Fig.3(b)(d) のように本手法は曲率対数グラフの直線性が多少悪くなる．

Fig.4 に弧長変化を一定にして近似する手法と本手法の曲線が描画可能な領域を示す． P_0, P_1, P_2 は対話的生成において両端点での位置と接線方向を指定する制御点である．Fig.4 のように $P_0 = \{-1, 0\}$ ， $P_2 = \{1, 0\}$ に固定し P_1 を自由に動かしたときに，色の付いている領域に P_1 がある場合には曲線が描画可能である．色の付いていない領域に P_1 がある場合には曲線が描画不可能である．Fig.4 から弧長変化を一定にして近似する手法に比べ本手法は描画可能な領域が広



(b) (a) の曲率対数グラフ (d) (c) の曲率対数グラフ

図3 弧長変化を一定にして近似する手法と本手法の結果

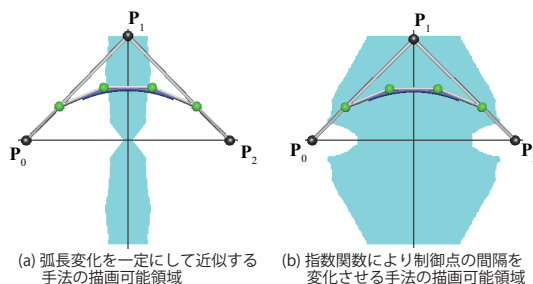


図4 描画可能領域

いことがわかる．

5 まとめ

本報告では，弧長変化を一定にして近似する手法に対し指数関数を用いて制御点間の距離を変化させ，曲率の大きいところにおいて密に制御点を配置する手法を提案した．本手法より，方向角を大きくとれるため曲線の描画可能な領域が広がるが，曲率対数グラフの直線性が多少悪くなることが分かった．

今後の展望には，さらに近似精度の良い手法の検討や曲面への拡張が挙げられる．

参考文献

- 1) N.Yoshida, T.Saito : Interactive Aesthetic Curve Segments, The Visual Computer, Pacific Graphics, No.9-11, (2006), pp896-905.
- 2) 三浦憲二郎，白幡良，上利真一：典型的曲線の非定常化とその曲面への拡張，情報処理学会グラフィクスとCAD研究会，No.2008，(2008)，pp73-78.
- 3) 福田諒，吉田典正，斎藤隆文，三浦憲二郎：Bezier形式による対数美的平面曲線の対話的生成，精密工学会秋季大会，No.2009，(2009)，pp957-958.