

応力法による1自由度系剛体トラスの形態解析と応力解析

日大生産工（院）○青木 大輔 日大生産工（院）佐々木 義仁
日大生産工 川島 晃 日大生産工 花井 重孝

1. はじめに

パンタドームに代表される可動系を用いた構造物では、自重と加圧による立ち上がり部の軸圧縮力の方向変化（二次応力の発生）ならびに引張応力に転じる際の力学的不安定性が問題となる。また力学上、構造安全性の基軸（尺度）となる剛体構造を扱う必要がある。変位法は剛性無限大の支配方程式を直接解くことができないため、変位に関する付帯条件付の解析^{1) 2)}となる。したがって、構築時に導入される自己釣合応力（余力）の加圧による変動を考慮することが困難となる。一方応力法は、剛体構造としての応力解と適合条件に依存する応力解を個々に求められる利点がある^{3) ~ 6)}。

本研究では、可動系に適合した対称性を有する1自由度系剛体構造（トラス構造、曲げ材と引張材で構成される複合構造）を対象として、応力変動を考慮した構造解析法の開発を目的としている。

本報はその第1報として張力系における不安定剛体トラスの形態解析⁶⁾を圧縮力系に拡張し、その二次応力のみを考慮した単純な力学モデルに適用した結果を述べる。

2. 解析の概要

2.1 記号

（1）現釣合状態

m : 応力数 n : 変位の自由度

r : 応力の自由度 ($=m-n$)

$\mathbf{f}$: 荷重ベクトル ($n \times 1$)

$\mathbf{n}$: 軸方向力ベクトル ($m \times 1$)

$\mathbf{B}$: 釣合行列 ($n \times m$)

（2）現釣合状態からの増分量

増分量には Δ を付ける。

$\Delta \mathbf{f}$: 増分荷重増分ベクトル ($n \times 1$)

$\Delta \mathbf{n}_3$: 増分応力ベクトル ($3m \times 1$)

(増分軸方向力と材軸に直交する二軸方向の二次応力)

$\Delta \mathbf{l}_3$: 増分相対変位ベクトル ($3m \times 1$)

$\mathbf{S}_3$: 柔性行列 ($3m \times 3m$)

$\Delta \mathbf{x}$: 増分節点変位ベクトル ($n \times 1$)

$\mathbf{\Lambda}$: 釣合マトリックス ($n \times 3m$)

$\mathbf{\Lambda}^+$: $\mathbf{\Lambda}$ のムーア・ペンローズ一般逆行列 ($3m \times n$)

$\mathbf{G}$: $(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}^+ \mathbf{\Lambda})$ の r 個の独立な列ベクトル

$\mathbf{I}$: 単位行列

2.2 基本関係式^{4) 5)}

（1）現形態および荷重増分に対する釣合式

$$\mathbf{f} = \mathbf{Bn} \quad (1)$$

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{\Lambda} \Delta \mathbf{n}_3 \quad (2)$$

（2）幾何学的関係式

$$\Delta \mathbf{l}_3 = \mathbf{\Lambda}^T \Delta \mathbf{x} \quad (3)$$

（3）構成式

$$\Delta \mathbf{l}_3 = \mathbf{S}_3 \Delta \mathbf{n}_3 \quad (4)$$

2.4 解析手順

図1に示す平面力学モデル（構面を剛な線材に置換）を通して、解析の手順を述べる。

手順1) 初期形態は支台に載せて安定化 ($m=n$) を図り、自重を各節点に分配して式(1)を軸圧縮力ベクトル $\mathbf{n}$ について解く。

手順2) 加圧し（支台はバネモデルとして一定な増分荷重 $\Delta \mathbf{f}$ を与え）、式(2)を $\Delta \mathbf{n}_3$ について解く⁴⁾。

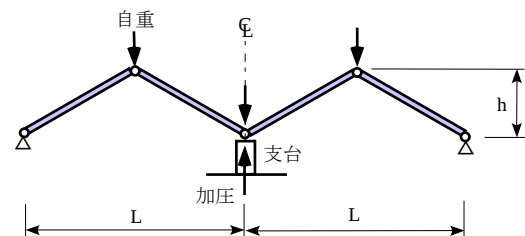


図1 平面力学モデル

Shape Analysis and Stress Analysis of 1-Degree-of-freedom system of Rigid Truss Structures
using the stress method

Daisuke AOKI, Yoshihito SASAKI, Akira KAWASHIMA and Shigetaka HANAI

手順3) Δn_3 を式(4)に代入して Δl_3 を求め、式(3)から節点変位ベクトル Δx を求める。

$$\Delta x = (\Lambda^+)^T \Delta l_3 \quad (5)$$

手順4) 変位後の釣合式(式(6))を作成し、不適合力 p (式(7))を求める。

$$f + \Delta f = (B + \Delta B)(n + \Delta n) \quad (6)$$

$$p = (B + \Delta B)(n + \Delta n) - (f + \Delta f) \quad (7)$$

手順5) p のノルム二乗平均値 (Er) が 10^{-3} になるまで、 p を Δf に置き換えて手順2)～4)の繰返し計算を行う。

$$Er = \frac{|p|}{n} \quad (8)$$

2.5 Δn_3 の力学的内容

釣合式(式(2))は、 n の方向変化による二次応力を考慮しているので系全体は不静定系 ($3m > n$) となる。特解(剛体としての解)を Δn_3^P とする。

$$\Delta n_3^P = \Lambda^+ \Delta f \quad (9)$$

二次応力の発生による余解を Δn_3^C とする。

$$\Delta n_3^C = G \Delta \beta \quad (10)$$

$$\Delta n_3 = \Delta n_3^P + \Delta n_3^C \quad (11)$$

不静定系であるので次式の適合条件を解く。

$$G^T \Delta l_3 = 0 \quad (12)$$

上式に式(4)を代入して、整理すると次式で表せる。

$$(G^T S_3 G) \Delta \beta = -G^T S_3 \Delta n_3^P \quad (13)$$

上式の $(G^T S_3 G)$ は対称行列であり、

$$\Delta \beta = -(G^T S_3 G)^{-1} G^T S_3 \Delta n_3^P \quad (14)$$

Δn_3^C は式(10)と式(13)より、二次応力の発生による適合条件(式(12))を満足するように特解 Δn_3^P を再配分したものである。したがって、 $(G^T S_3 G)$ が特異のとき、 Δn_3^C の唯一解を求めることができない。

3. 解析結果

図1の平面力学モデルについて解析した。スパン L は 200(cm)、高さ h は 50(cm)、支台のバネモデル定数は 100(kN/cm)、自重は 1kN、加圧は(支点反力と同等の) 1.5kN 刻みで 105kN まで加えた(頂点高さ約 2h)。図2は、初期形態からの形態変化を示してい

る。図2は、初期形態からの形態変化を同様に、表1は初期形態の材長との相対誤差を示している(剛体仮定を満足する)。

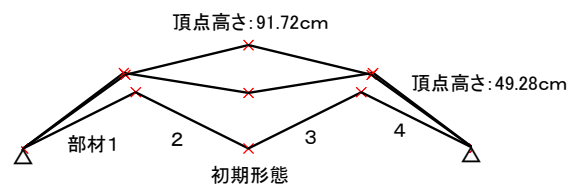


図2 形態変化

表1 初期形態からの材長変化 (cm)

部材	初期形態	頂点高さ 91.72cm	相対誤差%
1	111.8034	111.8635	0.054
2	111.8034	112.3446	0.484
3	111.8034	112.3446	0.484
4	111.8034	111.8635	0.054

4. あとがき

以上、本報では単純な力学モデルを用いて、圧縮力系で問題となる立ち上がり部の二次応力発生による不安定性を調べた。加圧 1kN (支点反力以下) のときは式(13)の適合行列 $(G^T S_3 G)$ が特異となった。これは部材2と部材3が平行に近づく際の力学的不安定性によるものであり、 $(G^T S_3 G)$ の固有問題から求まる応力モード⁴⁾との関連を調べる必要がある。

参考文献

- 1) 半谷裕彦、川口健一：不安定リンク構造の形状決定解析、日本建築学会構造系論文集、No.381、pp.56-60、1987.11
- 2) 川口健一、川田知典：メカニズムを持つテンセグリティ構造の群論を用いた考察、日本建築学会構造系論文集、No.631、pp.1561-1568、2008.9
- 3) 川島 晃：変位法による応力法による立体骨組の構造解析に関する研究、日本大学学位論文、2006.3
- 4) 川島 晃、花井重孝：一般逆行列に基づく応力法による立体トラスの有限変位応力解析、日本建築学会構造工学論文集、Vol.54B、pp.241-250、2008.3
- 5) 川島 晃、花井重孝：一般逆行列に基づく応力法による平面骨組の幾何学的非線形解析、日本建築学会関東支部審査付研究報告集5、pp.49-52、2010.3
- 6) 川島 晃、佐々木義仁、竹内嘉一：一般逆行列に基づく応力法による形態解析に関する研究(その1. 基本関係式、その2. 不安定剛体トラス)、日本建築学会学術講演梗概集(北陸)、pp.321-322、pp.323-324、2010.9