

応力法による平面骨組の自由振動解析の定式化

日大生産工 ○川島 晃

1. はじめに

応力法は、荷重と材端応力の関係を支配方程式とするため振動解析には不向きであった。支配方程式の数値計算法に一般逆行列を用いることにより、古典的な応力法のように不静定骨組を静定基本形に改造する必要がなくなる。本報では応力法研究^{1)~3)}の成果をもとに、変形の適合条件を付帯条件とする自由振動解析の定式化を述べる。

2. 座標と仮定および記号

2.1 座標

全体座標 $x_1 - x_2$ (図1(a)) と部材座標 $y^1 - y^2$ (図1(b)) はいずれも右手系に設定する。

2.2 主な仮定

- 1) 本報で取り扱う対象は直線材で構成された平面トラスと平面ラーメンで、部材はヤング係数 E をもつ。
- 2) 断面の重心は y^1 軸上にあり、断面の主軸は y^2, y^3 軸 (図1(b)) に一致している。
- 3) 荷重は節点に作用するものとする。

2.3 記号

- N : 部材 (p) の材端が接続する節点名 ($= A, B$)
 $\mathbf{x}_{(N)}$: 全体座標の原点 0 に対する位置ベクトル
 $\mathbf{a}^1_{(p)}, \mathbf{a}^2_{(p)}$: 部材のベースベクトル (図1(b))
 $\ell_{(p)}$: 部材の材長 (図2)
 $\Delta\ell_{(p)}$: 部材の伸縮
 $\sigma_{(N, p)}$: 部材の独立な材端応力 $\mathbf{m}(A, P), \mathbf{m}(B, P)$, $\mathbf{n}(P)$ (図2) を成分とするベクトル
 σ : 応力ベクトル ($\sigma_{(N, p)}$ を成分とするベクトル)
 $\tau_{(N, p)}$: 部材の独立な変形 $\tau_{(A, p)}, \tau_{(B, p)}$ (図3) および $\Delta\ell_{(p)}$ を成分とするベクトル
 τ : $\tau_{(N, p)}$ を成分とするベクトル (系全体の変形)

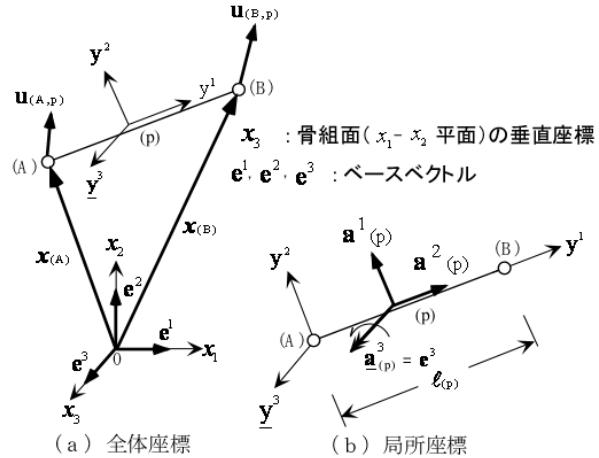


図1 座標

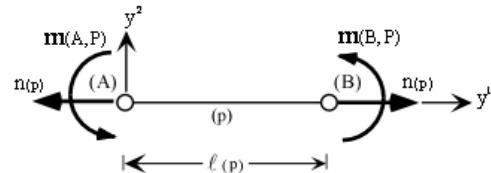


図2 部材の力学的諸量

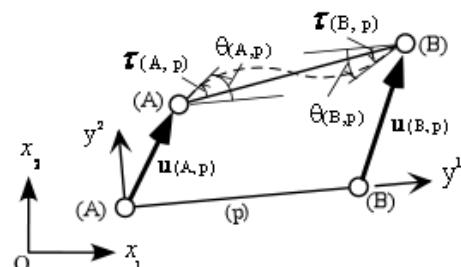


図3 部材の幾何学的諸量

ベクトル

$\theta_{(N, p)}$: 部材の材端たわみ角 $\theta_{(A, p)}, \theta_{(B, p)}$ および材端変位 $\mathbf{u}_{(A, p)}, \mathbf{u}_{(B, p)}$ (図3) を成分とするベクトル

θ : $\theta_{(N, p)}$ を成分とするベクトル (系全体の節点変位ベクトル)

$\mathbf{B}_{(p)}$: 部材の力学的関係を表すマトリックス

Fundamental Formula of Free Vibration Analysis of Plane Frames using the stress method

Akira KAWASHIMA

B : 系全体の力学的関係を表すマトリックス
Q : 部材と節点の接続関係を表すマトリックス
 $I_{(p)}$: 断面の主軸に関する断面二次モーメント
 $A_{(p)}$: 断面積
 $H_{(p)}$: 部材の柔性マトリックス
H : 系全体の柔性マトリックス
D : 系全体の釣合マトリックス ($= \mathbf{Q}\mathbf{B}$)
M_(p) : 部材の質量マトリックス (consistent mass matrix (付録1))

M : 系全体の質量マトリックス (付録1))

肩付添字 T : マトリックスとベクトルの転置
 なお、時間 t は混乱しない範囲で省略する。

3. 基本関係式

3.1 力の釣合式

部材 (p) の独立な材端応力ベクトル $\sigma_{(N, p)}$ を全体座標で表し $m_{(A, p)}$, $m_{(B, p)}$, $n_{(A, p)}$, $n_{(B, p)}$ とすると、表 1 の関係を得る。表 1 中の $b^2_{(p)}$ は、

$$b^2_{(p)} = \frac{1}{\ell_{(p)}} a^2_{(p)} \quad (1)$$

表 1 は次式で表す。

$$\mathbf{m}_{(N, P)} = \mathbf{B}_{(p)} \boldsymbol{\sigma}_{(N, P)} \quad (2)$$

ここに、

$$\mathbf{m}_{(N, P)} = [m_{(A, P)}, m_{(B, P)}, n_{(A, P)}, n_{(B, P)}]^T \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{(N, P)} = [m_{(A, P)}, m_{(B, P)}, n_{(P)}]^T \quad (4)$$

$\mathbf{m}_{(N, P)}$ が節点 (N) に及ぼす力のモーメントを $m_{(N)}$ および力を $n_{(N)}$ とすると、釣合式は部材と節点の接続マトリックス **Q** を用いて式(5)で表せる。

$$\mathbf{m} = \mathbf{Q}\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} \quad (5)$$

ここに、**B** は表 1 の行列 $\mathbf{B}_{(p)}$ を対角項に並べたマトリックスである。

$$\mathbf{m} = [m_{(1)}, n_{(1)}, m_{(2)}, n_{(2)}, \dots]^T \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\boldsymbol{\sigma}_{(N, 1)}, \boldsymbol{\sigma}_{(N, 2)}, \dots]^T \quad (7)$$

3.2 幾何学的関係式

部材 (p) の独立な変形ベクトル $\tau_{(N, p)}$ と材端変位ベクトル $\theta_{(N, p)}$ の関係は式(8)で表せる。

$$\tau_{(N, P)} = \mathbf{B}_{(p)}^T \theta_{(N, P)} \quad (8)$$

式(8)において、

$$\tau_{(N, P)} = [\tau_{(A, P)}, \tau_{(B, P)}, \Delta\ell_{(p)}]^T \quad (9)$$

表 1 部材の力学的関係

(枠内 : マトリックス $\mathbf{B}_{(p)}$)

	$m_{(A, P)}$	$m_{(B, P)}$	$n_{(P)}$
$m_{(A, P)}$	1	0	0
$m_{(B, P)}$	0	1	0
$n_{(A, P)}$	$b^2_{(p)}$	$b^2_{(p)}$	$-a^1_{(p)}$
$n_{(B, P)}$	$-b^2_{(p)}$	$-b^2_{(p)}$	$a^1_{(p)}$

$$\boldsymbol{\theta}_{(N, p)} = [\theta_{(A, p)}, \theta_{(B, p)}, \mathbf{u}_{(A, p)}, \mathbf{u}_{(B, p)}]^T \quad (10)$$

節点 (N) の節点角を $\theta_{(N)}$ 、節点変位ベクトルを $\mathbf{u}_{(N)}$ としてまとめて $\boldsymbol{\theta}$ で表すと、幾何学的関係式は次式で表せる。

$$\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{Q}\mathbf{B})^T \boldsymbol{\theta} = \mathbf{D}^T \boldsymbol{\theta} \quad (11)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_{(N, 1)}, \tau_{(N, 2)}, \dots]^T \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_{(1)}, \mathbf{u}_{(1)}, \theta_{(2)}, \mathbf{u}_{(2)}, \dots]^T \quad (13)$$

3. 3 構成式

部材の変形ベクトル $\tau_{(N, p)}$ と応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}_{(N, P)}$ の関係は、弾性曲線式より式(14)で表せる。

$$\boldsymbol{\tau}_{(N, P)} = \mathbf{H}_{(p)} \boldsymbol{\sigma}_{(N, P)} \quad (14)$$

$$\mathbf{H}_{(p)} = \begin{bmatrix} \frac{\ell_{(p)}}{3EI_{(p)}} & -\frac{\ell_{(p)}}{6EI_{(p)}} & 0 \\ -\frac{\ell_{(p)}}{6EI_{(p)}} & \frac{\ell_{(p)}}{3EI_{(p)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ell_{(p)}}{EA_{(p)}} \end{bmatrix} \quad (15)$$

式(15)は部材全体にわたってまとめると、

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} \quad (16)$$

上式の **H** は $\mathbf{H}_{(p)}$ を対角項に並べた行列である。

4. 変形の適合条件式

釣合式 (式(5)) の一般解は **D** のムーア・ペンローズ一般逆行列を \mathbf{D}^+ とすると、

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^+ \mathbf{m} + (\mathbf{I} - \mathbf{D}^+ \mathbf{D}) \boldsymbol{\beta} \quad (17)$$

である。ここに、右辺の **I** は単マトリックス、**β** は任意ベクトルである。

式(17)の力学的内容は次の通りである。

- 1) 右辺第1項 $\mathbf{D}^+ \mathbf{m}$ は力の釣合のみ満足する解(特解)である。つまり、骨組を剛体と見なしたときの応力を表している。
- 2) 第2項 $(\mathbf{I} - \mathbf{D}^+ \mathbf{D}) \boldsymbol{\beta}$ は自己釣合応力(荷重 $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ の解:余力)であり、変形の適合条件を満たすための応力を表している。

$(\mathbf{I} - \mathbf{D}^+ \mathbf{D})$ の独立な r 個(不静定次数)の列ベクトルで作るマトリックスを \mathbf{G} とする。 $\boldsymbol{\beta}$ はその任意性より $\boldsymbol{\gamma}$ に置き換えると次式が成立する。

$$(\mathbf{I} - \mathbf{D}^+ \mathbf{D}) \boldsymbol{\beta} \equiv \mathbf{G} \boldsymbol{\gamma} \quad (18-1)$$

ここに、

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_r] \quad (18-2)$$

変形の適合条件は、(補)仮想仕事の原理より次式のようになる。

$$\mathbf{G}^T \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad (19)$$

式(19)に構成式(式(16))を代入すると、適合条件式は次式で表せる。

$$\mathbf{G}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (20)$$

つぎに、式(11)の一般解は \mathbf{D} のムーア・ペンローズ一般逆行列を \mathbf{D}^+ とすると、

$$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{D}^+)^T \boldsymbol{\tau} + (\mathbf{I} - \mathbf{D} \mathbf{D}^+) \boldsymbol{\alpha} \quad (21)$$

上式右辺の \mathbf{I} は単マトリックス、 $\boldsymbol{\alpha}$ は任意ベクトルである。

式(21)の力学的内容は次の通りである。

- a) 第1項 $(\mathbf{D}^+)^T \boldsymbol{\tau}$ は特解であり、適合条件(式(19))および次節で定式化する自由振動解を満足する応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}$ より求まる。
- b) 第2項 $(\mathbf{I} - \mathbf{D} \mathbf{D}^+) \boldsymbol{\alpha}$ は、変形 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ の解(余解:構成式(式(16))に無関係な初期ひずみや熱ひずみによる解)であるので省略することにする。よって、節点変位ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ は

$$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{D}^+)^T \boldsymbol{\tau} = (\mathbf{D}^+)^T \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma} \quad (22)$$

5. 応力法による自由振動解析の定式化

多自由度系の自由振動方程式は、次式で表せる。

$$\mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{(t)} + \mathbf{D} \boldsymbol{\sigma}_{(t)} = \mathbf{0} \quad (23)$$

この連立2階微分方程式の解は振幅マトリッ

クス $\boldsymbol{\Gamma}$ 、固有振動数 ω とすると次式で表せる⁴⁾。

$$\boldsymbol{\theta}_{(t)} = \boldsymbol{\Gamma} e^{i \omega t} \quad (24)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{(t)} = -\omega^2 \boldsymbol{\Gamma} e^{i \omega t} = -\omega^2 \boldsymbol{\theta}_{(t)} \quad (25)$$

式(25)の右辺 $\boldsymbol{\theta}_{(t)}$ に式(22)を代入する。

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{(t)} = -\omega^2 (\mathbf{D}^+)^T \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_{(t)} \quad (26)$$

式(26)を式(23)に代入すると、応力法による自由振動方程式は次式で表せる。

$$-\omega^2 \mathbf{M} (\mathbf{D}^+)^T \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_{(t)} + \mathbf{D} \boldsymbol{\sigma}_{(t)} = \mathbf{0} \quad (27)$$

ここに、変位の自由度を n とすると \mathbf{M} は $(n \times n)$ のマトリックスである。また応力数を m とすると、 \mathbf{D} は $(n \times m)$ のマトリックス、 \mathbf{H} は $(m \times m)$ のマトリックス、 $\boldsymbol{\sigma}_{(t)}$ は m 次元ベクトルである。

i) 静定構造の自由振動方程式

静定構造($n=m$)では自由振動方程式(式(27))を直接解ける。

ii) 不静定構造の自由振動方程式

不静定構造($n < m$)では、式(27)は変形の適合条件(式(20))を付帯条件として解く。つまり、式(20)の $\boldsymbol{\sigma}$ に $_{(t)}$ を付けて部分マトリックス表示する。

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{D} \\ \dots \\ \mathbf{G}^T \mathbf{H} \end{array} \right] - \omega^2 \left[\begin{array}{c} \mathbf{M} (\mathbf{D}^+)^T \mathbf{H} \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \boldsymbol{\sigma}_{(t)} = \mathbf{0} \quad (28)$$

ここに、 \mathbf{G} (式(18-1, 2))のランク $r = m - n$ である。つまり、式(28)の [] 内は $(m \times m)$ のマトリックスである。

式(28)は次のように記号化する。

$$\tilde{\mathbf{G}}_{(m \times m)} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{D}_{(n \times m)} \\ \dots \\ (\mathbf{G}^T \mathbf{H})_{(r \times m)} \end{array} \right]_{(r=m-n)} \quad (29-1)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{(m \times m)} = \left[\begin{array}{c} \{\mathbf{M} (\mathbf{D}^+)^T \mathbf{H}\}_{(n \times m)} \\ \dots \\ \mathbf{0}_{(r \times m)} \end{array} \right]_{(r=m-n)} \quad (29-2)$$

上式の下付()内はマトリックスの大きさを表す。

式(28)は式(29-1, 2)を用いて、

$$(\tilde{\mathbf{G}} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}) \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (30)$$

ここに、添字_(t)は省略している。

釣合マトリックス $\mathbf{D}_{(n \times m)}$ と適合マトリックス $(\mathbf{G}^T \mathbf{H})_{(r \times m)}$ で構成される $\tilde{\mathbf{G}}_{(m \times m)}$ は非特異（行列式 $|\tilde{\mathbf{G}}| \neq 0$ ）である。つまり、式(30)は標準固有値問題に変換できる。

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} = \lambda \boldsymbol{\sigma} \quad (31)$$

ここに、

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{M}} \quad , \quad \lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad (32)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ を式(22)に代入し、変位モード $\boldsymbol{\theta}$ が求まる。

6. まとめ

以上、応力法による骨組動特性の分析に向けて、応力モード $\boldsymbol{\sigma}$ による（線形）自由振動解析の定式化を示した。存在応力を考慮した（非線形）自由振動解析の定式化は次報で述べる。

参考文献

- 1) 川島 晃：変位法および応力法による立体骨組の構造解析に関する研究、日本大学学位論文、2006.3
- 2) 川島 晃、花井重孝：一般逆行列に基づく応力法による立体トラスの有限変位応力解析、日本建築学会構造工学論文集、Vol.54B, pp241-250, 2008.3
- 3) 川島 晃、花井重孝：一般逆行列に基づく応力法による平面骨組の幾何学的非線形解析、日本建築学会関東支部審査付研究報告集5、pp.49-52、2010.3
- 4) 川井忠彦著：マトリックス法振動および応答-コンピュータによる構造工学講座 I-4-B、日本鋼構造協会編、培風館、1971.2

付録 質量マトリックス $\mathbf{M}_{(p)}$ と \mathbf{M} について

付図1と付図2は、力学的諸量と幾何学的諸量を示す。

$$\mathbf{m}^*_{(N,p)} = [\mathbf{m}_{(A,p)}, \mathbf{m}_{(B,p)}, \mathbf{n}^1_{(A,p)}, \mathbf{n}^2_{(A,p)}, \mathbf{n}^1_{(B,p)}, \mathbf{n}^2_{(B,p)}]^T \quad (付 1)$$

$$\boldsymbol{\theta}^*_{(N,p)} = [\theta_{(A,p)}, \theta_{(B,p)}, \mathbf{u}^1_{(A,p)}, \mathbf{u}^2_{(A,p)}, \mathbf{u}^1_{(B,p)}, \mathbf{u}^2_{(B,p)}]^T \quad (付 2)$$

$$\mathbf{m}^*_{(N,p)} = \mathbf{M}_{(p)} \ddot{\boldsymbol{\theta}}^*_{(N,p)} \quad (付 3)$$

ここに、部材(p)の密度を ρ として

$$w_{(p)} = \rho A_{(p)} \ell_{(p)} \quad (付 4)$$

の記号を使うと、 $\mathbf{M}_{(p)}$ は次式⁴⁾となる。

$$\mathbf{M}_{(p)} = w_{(p)} \begin{bmatrix} \frac{\ell_{(p)}^2}{105} & -\frac{\ell_{(p)}^2}{140} & 0 & \frac{11\ell_{(p)}}{210} & 0 & \frac{13\ell_{(p)}}{420} \\ -\frac{\ell_{(p)}^2}{140} & \frac{\ell_{(p)}^2}{105} & 0 & -\frac{13\ell_{(p)}}{420} & 0 & \frac{11\ell_{(p)}}{210} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{11\ell_{(p)}}{210} & -\frac{13\ell_{(p)}}{420} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{9}{70} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{70} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{70} \end{bmatrix} \quad (付 5)$$

sym.

式(付3)を全体座標で表す。 $\mathbf{m}_{(N,p)}$ （式(3)）の成分 $\mathbf{n}_{(N,p)} (N = A, B)$ は $\mathbf{a}^1_{(p)}, \mathbf{a}^2_{(p)}$ （図1(b)）を用いて、

$$\mathbf{n}_{(N,p)} = \mathbf{a}^1_{(p)} \mathbf{n}^1_{(N,p)} + \mathbf{a}^2_{(p)} \mathbf{n}^2_{(N,p)} \quad (付 6)$$

同様に、式(付2) $\boldsymbol{\theta}^*_{(N,p)}$ の成分 $\mathbf{u}^\alpha_{(N,p)} (\alpha = 1, 2)$ は式(10)の成分 $\mathbf{u}_{(N,p)}$ を用いて

$$\mathbf{u}^\alpha_{(N,p)} = (\mathbf{a}^\alpha_{(p)})^T \mathbf{u}_{(N,p)} \quad (付 7)$$

式(付6)と式(付7)より

$$\mathbf{m}_{(N,p)} = \mathbf{B}^*_{(p)} \mathbf{m}^*_{(N,p)} \quad (付 8)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}^*_{(N,p)} = (\mathbf{B}^*_{(p)})^T \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{(N,p)} \quad (付 9)$$

式(付8)と式(付9)において、

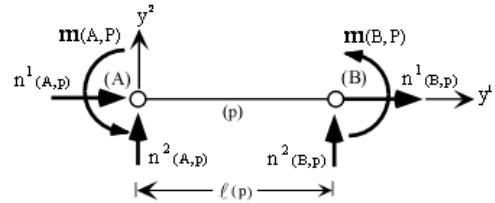
$$\mathbf{B}^*_{(p)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}^1_{(p)} & \mathbf{a}^2_{(p)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a}^1_{(p)} & \mathbf{a}^2_{(p)} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} \quad (付 10)$$

$$\text{ここに, } \mathbf{o} = [0, 0]^T \quad (付 11)$$

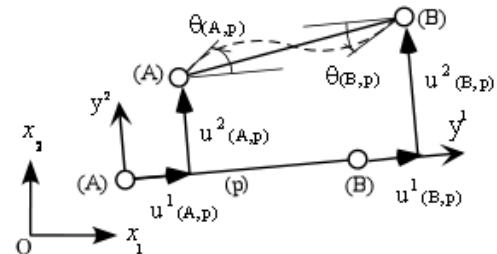
式(付8)と式(付9)を式(付3)に代入する。

$$\mathbf{m}_{(N,p)} = \mathbf{B}^*_{(p)} \mathbf{M}_{(p)} (\mathbf{B}^*_{(p)})^T \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{(N,p)} \quad (付 12)$$

上式を部材全体に亘ってまとめると質量マトリックス \mathbf{M} が得られる。



付図1. 力学的諸量



付図2. 幾何学的諸量