2-21

殻構造の振動に関する数値解析と検討

日大生産工(院) ○田中洸平　日大生産工(研究員)　加川幸雄
日大生産工　山崎　憲

1　はじめに

スチールパンは浅い球殻内につくられた多数の浅い球殻群から構成されている。楽器などが工房で一品生産されている間は、製造は職人、芸術家の問題である。しかし工場などで多量生産されるようになると、特性と形状などの関係を予測、設計することが要求される。

本研究は殻の弾性振動理論に基づいた数値シミュレーションにより、殻の振動の状態を明らかにして、有効な設計指針を得るためのものである。筆者らは球殻を持つ楽器であるスチールパンに対して、放射される音の測定(1)や、実験モード解析によるモード同定など(2)を行った。数値シミュレーションは解析の汎用性により､その結果はスチールパンのみならず、ドーム型スピーカ・コーンの振動設計などにもただちに応用可能である。円錐型スピーカ・コーン振動の差分法による数値シミュレーションについては加川らの研究(3)(4)がある。

今回はスチールパンの音階部に相当する球殻の自由振動の数値解析と検討を行った。

2　数学モデル

2.1　球殻の軸対称振動方程式

Fig.1 に軸対称である球殻の断面を示す。球殻の伸び振動の方程式は、

$$\frac{du^2}{d^2\theta}+\cot\theta\frac{du}{d\theta}-\frac{dw}{d\theta}+\left(K^2-\cot^2\theta\right)u=0 \tag{1}$$

$$\frac{du}{d\theta}+u\cot\theta+\left(K^2-2\right)w=0 \tag{2}$$

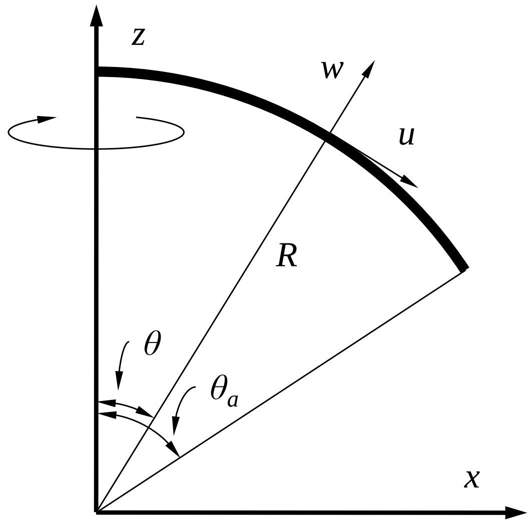


Fig.1 Axisymmetric spherical shell.

で表される。ここで､u は伸びの変位（中性面の面内変位)､w は伸び u に伴う横方向の変位（中性面に垂直な変位)、θ は球殻の角度、また、

$$K^2=\frac{\left(1-\sigma^2\right)\rho}{E}\omega^2R^2 \tag{3}$$

であり､E はヤング率､σ はポアソン比、ρ は密度、ω は角周波数、R は球殻の曲率半径である。

2.2　境界条件

軸対称振動において、球殻の頂点は自由ではなく、面内変位は反対側と向き合っている。そのため､周辺固定のときは、

$$\theta=0、\ \theta=\theta_a\ で、\ u=0 \tag{4}$$

周辺自由のときは、

$$\theta=0\ で、\ u=0$$
$$\theta=\theta_a\ で、\ \frac{du}{d\theta}-w=0 \tag{5}$$

となる。

Numerical Analysis and Study on Vibration of Shell Structures.

Kouhei TANAKA, Eriko HASHIMOTO, Yukio KAGAWA and Ken YAMAZAKI

3　物理定数

殻に鋼板を想定して、

$$E = 2.1\times10^{11}[Pa]$$

$$\sigma = 0.3$$

$$\rho = 7.8\times10^{3}[kg/m^{3}]$$

殻の形状として、

$$R = 0.5875[m]$$

$$\theta_a = 0.04[rad]$$

なる形状の球殻解析を行った。

4　数値計算法

数値計算には差分法[5]を採用し、次の 2 つの手順を考えた。

4.1 先に w を消去して計算する方法

式(1)(2)から w を消去し、整理すると、

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \cot\theta\frac{du}{d\theta} + \left(\lambda - \mathrm{cosec}^2\theta\right)u = 0 \tag{6}$$

となる。ここで、

$$\lambda = \frac{\left(K^2+1\right)\left(K^2-2\right)}{K^2-1} \tag{7}$$

である。式(6)は Legendre の陪微分方程式の形をしているが λ の値は未知数であるため解析的には解けない。そのため、数値的に解くために式(6)を中心差分により、差分化する。すなわち、

$$\begin{aligned} &u = u_n \\ &\frac{du}{d\theta} = \frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2h} \\ &\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2} \end{aligned} \tag{8}$$

として、式(7)へ代入し、整理すると、

$$\begin{aligned} &-\left(\frac{1}{h^2}-\frac{\cot\theta_n}{2h}\right)u_{n-1} + \left(\frac{2}{h^2}+\frac{1}{\sin^2\theta_n}\right)u_n \\ &\qquad -\left(\frac{1}{h^2}+\frac{\cot\theta_n}{2h}\right)u_{n+1} = \lambda u_n \end{aligned} \tag{9}$$

となる。同様に境界条件も差分化すると、周辺固定の場合は式(4)より、

$$n=0\text{、}\ n=N\ \text{で、}\ u_0 = u_N = 0 \tag{10}$$

となる。周辺自由の場合は $n=N$ で後退差分を用いる。すなわち、

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{u_n-u_{n-1}}{h} \tag{11}$$

として、式(5)より、

$$\begin{aligned} &n=0\ \text{で、}\ u_0 = 0 \\ &n=N\ \text{で、}\ -\frac{1}{h}u_{N-1}+\frac{1}{h}u_N = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

となる。ここで h は差分の刻み幅で、$h=\theta_a/N$ として表され、n は差分の要素番号、N は分割数、$\theta_n=nh$、$0\leqq n\leqq \mathrm{N}$ である。式(9)(10)(12)から、N+1 個の連立方程式が得られ、λ を固有値とした固有値問題となる。また、得られた固有値 λ に対して、固有角周波数 ω が式(7)、(3)により対応している。これに対して固有ベクトル u が得られ、式(2)によって w の分布が与えられる。

4.2 w を消去しないで式(1)(2)を連立して直接計算する方法

式(8)を式(1)(2)へ代入し、整理すると、

$$\begin{aligned} &-\left(\frac{1}{h^2}-\frac{\cot\theta_n}{2h}\right)u_{N-1} + \left(\frac{2}{h^2}+\cot^2\theta_n\right)u_N \\ &-\left(\frac{1}{h^2}+\frac{\cot\theta_n}{2h}\right)u_{N+1} - \frac{1}{2h}w_{n-1} + \frac{1}{2h}w_{n+1} = K^2u_N \end{aligned} \tag{13}$$

$$\frac{1}{2h}u_{n-1} - u_n\cot\theta_n - \frac{1}{2h}u_{n+1} + 2w_n = K^2w_N \tag{14}$$

となる。境界条件は周辺固定の場合は式(10)になり、周辺自由の場合は式(5)より、

$$\begin{aligned} &n=0\ \text{で、}\ u_0 = 0 \\ &n=N\ \text{で、}\ -\frac{1}{h}u_{N-1}+\frac{1}{h}u_N - w_N = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

となる。式(13)(14)(10)(15)から、2N+2 個の連立方程式が得られ、K^2 を固有値とした固有値問題となる。また、得られた固有値 K^2 に対して、固有角周波数 ω が式(3)により対応している。これに対して固有ベクトル u と w が得られる。この場合、w の境界条件をきちんと規定することができる。したがって 4.1、4.2 は境界条件が少し異なるわけである。

4.3 計算方法

計算は数式処理システム Mathematica 7 (Wolfram Research 社製)を用いて行った[6]。Mathematica にはいくつかの固有値解析を行う関数があるが、係数行列から固有値と固有ベクトルを同時に計算することのできる関数 Eigensystem を使用した。連立方程式が標準形に変換できれば上記のようなソ

ルバーで容易に計算できる。

5　結果と考察

Table.1 に解法 4.1、w を消去して計算した固有値 λ(最も小さい 3 つ)と対応する K^2 の値を示す。K^2 の値は境界条件によってはほとんど変化しないことがわかる。また、K は固有周波数に比例する。

Table.2 に解法 4.2、w を消去しないで式(1)(2)を連立して直接計算した固有値 K^2 の値を示す。Mathematica で計算した K^2 の値には非常に小さい値も得られたが、虚数を含む値や著しく小さい値は固有ベクトルも乱れているため、数値計算の誤差と考察の対象外とした。固有値 K^2 は Table.1 の値とほぼ同じ値になっていることがわかる。さらに、3 つのモードの固有周波数が非常に近接していることがわかる。

Fig.2 に解法 4.1、w を消去して計算した固有値 K^2 に対する固有ベクトル u と、式(2)から求まる相対変位 w を示す。(a)と(b)、(c)と(d)はそれぞれ、周辺自由の固有ベクトル u と相対変位 w、周辺固定の固有ベクトル u と相対変位 w に対応している。図の実線と破線、鎖線はそれぞれ第 1、第 2、第 3 固有ベクトルに対応している。w は球殻の中心で $dw/d\theta$=0 となっていることがわかる。

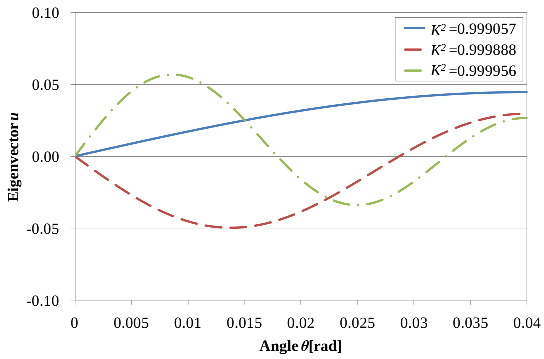
Fig.3 に解法 4.2、w を消去しないで式(1)(2)を連立して直接計算した固有値 K^2 に対

Table.1 Eigenvalue λ and K^2 for each boundary by solution method 4.1.

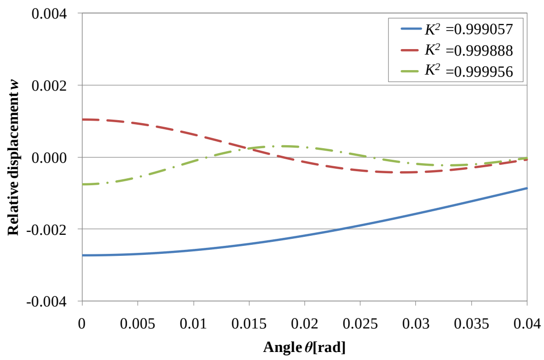
λ		K^2	
Free	Fixed	Free	Fixed
2121.32	9176.23	0.999057	0.999782
17783.30	30761.40	0.999888	0.999935
45588.60	64686.70	0.999956	0.999969

Table.2 Eigenvalue K^2 for each boundary by solution method 4.2.

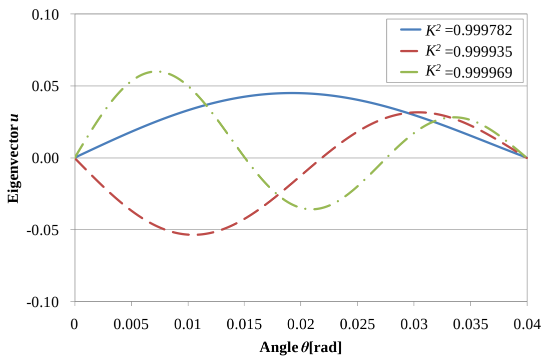
K^2	
Free	Fixed
0.999809	0.999802
0.999961	0.999960
0.999999	0.999999



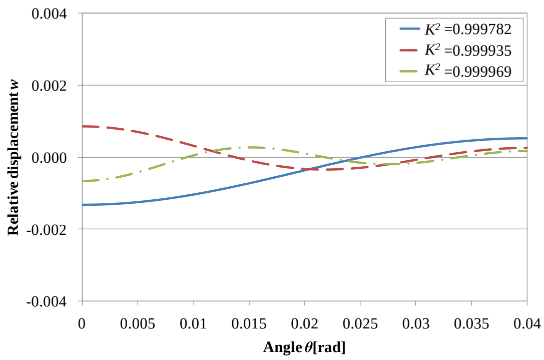
(a) Eigenvector u for free boundary.



(b) Relative displacement w for free boundary.



(c) Eigenvector u for fixed boundary.



(d) Relative displacement w for fixed boundary.

Fig.2 Eigenvector u and relative displacement w for eigenvalue K^2.

する固有ベクトル u、w を示す。(a)と(b)、(c)と(d)はそれぞれ、周辺自由の固有ベクトル u と w、周辺固定の固有ベクトル u と w に対応している。K^2 の値はどれも 1 に近い値であり、固有ベクトル u の境界条件による影響は境界端付近のみでほぼ同じ値になっていることがわかる。固有ベクトル w についは境界条件に関わらず同じ値となっていることがわかる。K と ω は式(3)によって比例関係になっているため少しの周波数の変化によって、固有ベクトルが変化するということがわかる。

6　おわりに

本研究では、スチールパンの音階部である球殻の自由振動の数値解析と検討を行った。その結果、2 つの解法が同じ固有値(固有周波数)を与えること、固有ベクトル(振動モード)も外縁付近を除いては類似の結果を与えることがわかった。固有角周波数 ω は近接していて、固有ベクトル u と w は、僅かな角周波数 ω の変化によって変わることがわかった。

今後の課題として、数値解析から得られた球殻の固有周波数と、スチールパンの実験モード解析により得られた固有周波数との比較検討を行ってゆきたい。

参考文献

1) 田中洸平他，スチールパンの音響特性に関する検討，第 42 回日本大学生産工学部学術講演会電気電子部会講演概要, (2009), pp.61～64.

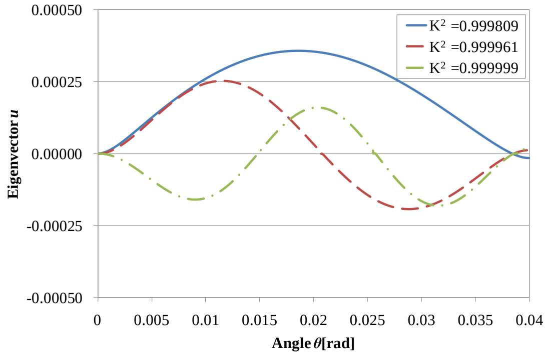
2) 田中洸平他，殻構造を持つ楽器の基礎的実験，日本音響学会演論文集, (2010), pp.957～960.

3) 加川幸雄，スピーカ・コーンの解析的研究，東北大学学術論文概要, (1963).

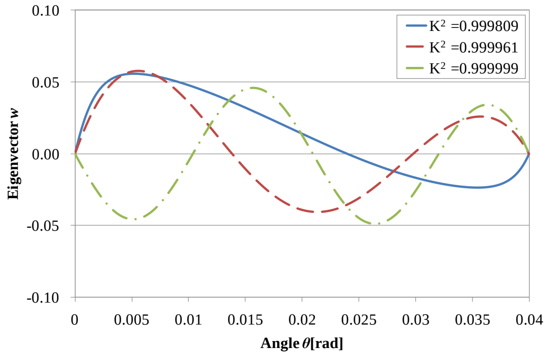
4) 加川幸雄，スピーカ・コーンの軸対称振動と固有周波数，日本音響学会誌, (1981), pp.494～503.

5) 寺沢寛一，自然科学者のための数学概論応用編，岩波書店, (1977), pp.277～326.

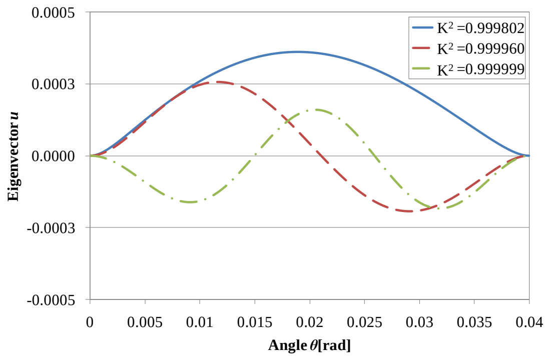
6) 吉本賢一，松下修己, Mathematica で学ぶ振動とダイナミクスの理論，森北出版, (2004), pp.49～69.



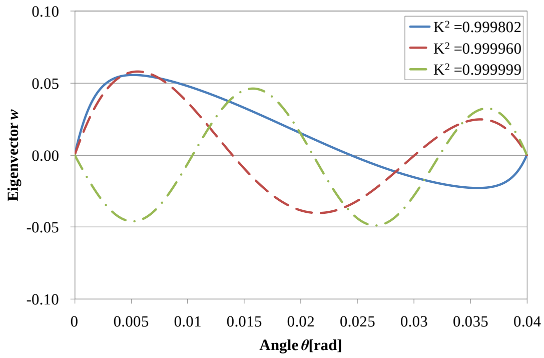
(a) Eigenvector u for free boundary.



(b) Eigenvector w for free boundary.



(c) Eigenvector u for fixed boundary.



(d) Eigenvector w for fixed boundary.

Fig.3 Eigenvector u and w for eigenvalue K^2.