

不完全情報一対比較行列における最適ウェイト推定法

日大生産工 (院) ○ 茂木 渉
日大生産工 篠原 正明

1. はじめに

AHP (Analytic Hierarchy Process) において, 一対比較情報が得られない, または一対比較の回数の減少を目的として, 一対比較デザイングラフが不完全グラフで与えられることがあり, その場合のウェイト推定法も数多く提案されているが, どの手法が最適なウェイト推定法かは深く議論されていない. そこで我々は, 完全情報一対比較行列で適用した行毎一般化平均ウェイト推定法を不完全情報一対比較行列のウェイト推定に拡張することを提案し, 完全情報下と同様に一般化平均パラメータ p に応じた真値推定能力を統計的に比較する.

2. 前提条件・方法論

2.1. 唯一の真値

1つの真値ウェイトベクトル $w(*)$ が存在すると仮定し, その真値ウェイトベクトルに対応する完全整合性を持つ一対比較行列 $W = \{w_{ij}\}$ ($w_{ij} = w_i(*)/w_j(*)$) の各要素に誤差 (雑音) が付加した一対比較行列 $A = \{a_{ij}\}$ が観測されると仮定し, さらにその任意の要素を欠落する. よって, 複数の真値が存在する場合 (様々な意見が混在する集団を対象とするなど) や, 意思決定に分裂傾向がある場合 (1つの考えに落ち着いていないなど) は本稿の対象外とする.

2.2. 不完全情報一対比較行列

一対比較行列 $A = \{a_{ij}\}$ には欠落要素が存在する場合を考える. 但し, 同項目間の一対比較値 $a_{ii} = 1$, 及び逆比性 $a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$ は成立すると仮定する.

2.3. 行毎一般化平均ウェイト推定法

一対比較行列 $A = \{a_{ij}\}$ からウェイトベクトル w を推定する方法として, 行毎一般化平均法を用いる. n 個の正值データ $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ が与えられたとき, p 次一般化平均 $G(p, a)$ は次式で定義される.

$$G(p, a) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

一対比較行列 $A = \{a_{ij}\}$ の第 i 行に, この p 次一般化平均を適用して項目 i のウェイト w_i を推定する方法が行毎 p 次一般化平均ウェイト推定法である.

$$w_i = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2)$$

これにより, パラメータ p を広範囲に設定することで, 様々なウェイトベクトル推定法を検証することができる.

2.4. 真値最適性

本稿における「最適なウェイトベクトル推定法」の1つとして, 真値ウェイトベクトル $w(*) = \{w_i(*)\}^T$ と, 任意の推定法 k による推定ウェイトベクトル $w(k) = \{w_i(k)\}^T$ との間の距離を最小化するものを考える. $w(*)$ と $w(k)$ の距離として, 本稿では以下の4つを考える.

(I) マンハッタン距離

$$d_1(w(*), w(k)) := \sum_{i=1}^n |w_i(*) - w_i(k)| \quad (3)$$

(II) ユークリッド距離

$$d_2(w(*), w(k)) := \left(\sum_{i=1}^n (w_i(*) - w_i(k))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

(III) Kullback-Leibler 情報理論的距離

$$d_{KL}(w(*), w(k)) := \sum_{i=1}^n w_i(*) \ln \left(\frac{w_i(*)}{w_i(k)} \right) \quad (5)$$

(IV) 逆 Kullback-Leibler 情報理論的距離

$$d_{IKL}(w(*), w(k)) := \sum_{i=1}^n w_i(k) \ln \left(\frac{w_i(k)}{w_i(*)} \right) \quad (6)$$

2.5. 論理的整合性

もう1つの「最適なウェイトベクトル推定法」の定義として, 整合度指標 CI 値を最小化するものを

Optimum Priority Weight Estimation Method
for Incomplete Information Pairwise Comparison Matrix

Wataru MOGI[†] and Masaaki SHINOHARA

考える．本稿における整合度指標として，要素誤差平均に基づく CI 値を不完全情報一対比較行列に一般化した CI_{error} を用いる [3] ．

$n \times n$ 一対比較測定行列 $A = \{a_{ij}\}$ に対して任意の推定ウェイトベクトルを $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ とするとき， $X = \{x_{ij}\} = \{x_i/x_j\}$ を一対比較測定行列と呼ぶ．測定行列 A と推定行列 X の要素毎の比率推定誤差である e_{ij} は (7) 式で表わされる．

$$e_{ij} = \frac{a_{ij}}{x_{ij}} = a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \quad (7)$$

この要素誤差に基づく CI 値， CI_{error} を以下で定義する．

$$CI_{\text{error}} = \left(\frac{1}{|E|} \sum_{(i,j) \in E} e_{ij} \right) - 1 \quad (8)$$

但し， E は一対比較デザイングラフにおける有向枝集合であり，自己ループ (i, i) は E には含まれない．

3. シミュレーション条件・方法

3.1. シミュレーション条件

- ・一対比較対象の項目数は $n = 5$ とする．
- ・真値ウェイトベクトル $w(*)$ のパターンとしては，項目ウェイトが順番に等間隔大小関係を持つ「昇順」と，すべての項目ウェイトが等しい場合「全等」を想定する．即ち「昇順」の場合は $w(*) = (1, 2, 3, 4, 5)^T$ ，「全等」の場合は $w(*) = (1, 1, 1, 1, 1)^T$ である．但し，計算手順内では $w(*)$ の各要素は総和が 1 になるように正規化されている．
- ・完全整合性を持つ一対比較行列 $W = \{w_{ij}\}$ の各要素毎に誤差 ε_{ij} を付加して一対比較行列 $A = \{a_{ij}\}$ を生成するが，誤差タイプとしては，例えば，加法形誤差 ($a_{ij} = w_{ij} + \varepsilon_{ij}$) や乗法形誤差 ($a_{ij} = w_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}$) が存在する．本研究では乗法形誤差を採用する．
- ・乗法形誤差 ε_{ij} は平均値 1 を持つ確率分布に従う確率変数 E の実現値である．確率変数 E は区間 $[1 - \sigma, 1 + \sigma]$ の一様分布に従うと仮定する．また，パラメータ σ を誤差度合と呼ぶ．
- ・一対比較行列 A の (対角要素 (i, i) 以外の) 任意の要素を欠落させ，欠落行列 A_{missing} を作成する．本稿では，一対比較デザイングラフが図 1 で与えられる場合を考える．従って，欠落行列 A_{missing} は (9) 式で与えられる．

$$A_{\text{missing}} = \begin{pmatrix} 1 & () & () & () & a_{15} \\ () & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ () & a_{32} & 1 & a_{34} & a_{35} \\ () & a_{42} & a_{43} & 1 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

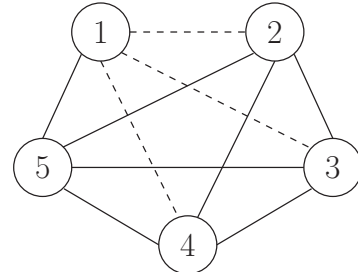


図 1. 欠落測定値 (破線) を持つ一対比較デザイングラフ

3.2. シミュレーション方法

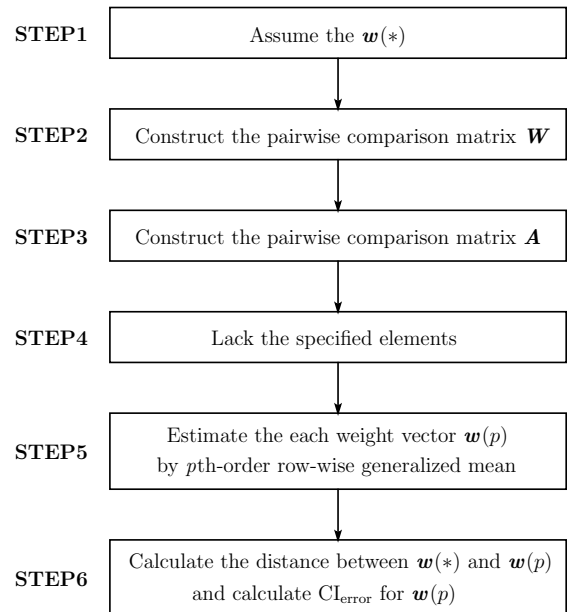


図 2. シミュレーションのフローチャート

- STEP1 真値ウェイトベクトル $w(*)$ を仮定する．
- STEP2 真値ウェイトベクトル $w(*)$ から，真値整合比較行列 $W = \{w_{ij}\}$ ($w_{ij} = w_i(*)/w_j(*)$) を構成する．
- STEP3 真値整合比較行列 W に対して，要素毎に適当な分布に従う乗法型誤差 (雑音) ε_{ij} を加えて，標本測定行列 $A = \{a_{ij}\}$ ($a_{ij} = w_{ij} \times \varepsilon_{ij}$) を生成する．但し，逆比性 ($a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$) は保存する．
- STEP4 標本測定行列 $A = \{a_{ij}\}$ の指定された要素 (図 1) を欠落させた標本欠落行列 A_{missing} を作成する．

STEP5 標本欠落行列 A_{missing} に行毎 p 次一般化平均

$$w_i(p) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (10)$$

を適用し、推定ウェイトベクトル $w(p) = \{w_i(p)\}^T$ を計算する．計算方法は 3.3 節で説明する．

STEP6 仮定した真値ウェイトベクトル $w(*)$ と推定ウェイトベクトル $w(p)$ との間の (I) ~ (IV) の距離をそれぞれ測定する．また、要素誤差平均に基づく整合度尺度 $CI_{\text{error}}(p)$ を (7),(8) 式で計算する．さらに、距離を最小化するパラメータ p とそれに対応する CI_{error} 毎に振り分けを行う．

3.3. 不完全情報下における行毎一般化平均ウェイト推定法

完全情報一対比較行列では (10) 式によりウェイトを計算することができたが、不完全情報下では欠落要素を持つため、直接適用できない．そこで、 A_{missing} の欠落要素を $a_{ij} := \{w_i/w_j \mid (i, j) \notin E\}$ と置き、左辺のウェイトを総和 1 に正規化することを考慮すれば、不完全情報一対比較行列に対する行毎 p 次一般化平均ウェイトは以下の非線形連立方程式の解として与えられる．

$$\frac{w_i(p)}{\sum w_\ell(p)} = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (11)$$

$$\left(\text{但し, } a_{ij} := \left\{ \frac{w_i(p)}{w_j(p)} \mid (i, j) \notin E \right\} \right)$$

これ連立方程式を解く方法として、単純反復法を用いて以下のように解く．

STEP5.1 反復回数 t 回目における行毎 p 次一般化平均推定ウェイトを $w(p; t) := \{w_i(p; t)\}^T$ と定義し、初期値 $w_i(p; 0)$ を設定する．

STEP5.2 連立方程式 (11) の右辺に $w_i(p; t)$ を代入し、これらを $w'_i(p; t)$ とする．

$$w'_i(p; t) \leftarrow \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (12)$$

$$\left(\text{但し, } a_{ij} := \left\{ \frac{w_i(p; t)}{w_j(p; t)} \mid (i, j) \notin E \right\} \right)$$

STEP5.3 $w'_i(p; t)$ を総和 1 に正規化したものを $w_i(p; t+1)$ とする．

$$w_i(p; t+1) \leftarrow \frac{w'_i(p; t)}{\sum w'_\ell(p; t)} \quad (13)$$

収束判定条件を満たさなければ、 $t := t+1$ として STEP5.2 へ．

4. シミュレーション結果

紙面の都合上、マンハッタン距離の結果のみ掲載する．まず、初期値を $w(p; 0) = (1, 1, 1, 1, 1)^T$ とし、真値を昇順と仮定した場合、横軸に p 、奥行きに誤差度合 σ での最小化到達頻度分布は図 3 のようになった．

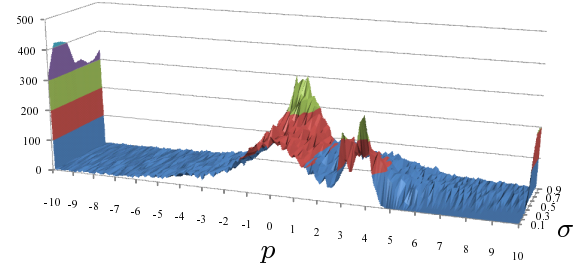


図 3. 昇順-距離最小化頻度分布 (奥行き σ)、初期値 $\forall w_i(p; 0) = 1$

$p = 0$ 付近でピークがあるのは完全情報と同じであるが、 $\sigma \rightarrow$ 小のとき、 $p = 4$ 付近にもピークが存在する．これは、不完全情報下では欠落部があることによって推定に自由度が発生し、同一の推定法でも複数個の推定ウェイトベクトルが得られる可能性があることが考えられる．

$\sigma = 0$ で自明解 $w(p) = w(*) = (1, 2, 3, 4, 5)^T$ を持つが、 $p \geq 2.6$ のときに、もう 1 つの解が得られる．例えば $p = 10$ のとき $w(p) = (0.1029, 0.0966, 0.1449, 0.1932, 0.4624)^T$ も連立方程式 (11) を満たす．しかし、順位の逆転現象も起こっており、真値に近いとはいえない．本稿ではこの近似解を第 2 真値近似解と呼び、真値に最も近くなるような解を第 1 真値近似解と呼ぶことにする．本稿では、できるだけ第 1 真値近似解を求めるため、初期値 = 真値として連立方程式を解く．その結果として、各パターンの CI_{error} 最小化頻度分布、及び距離最小化頻度分布を図 4 ~ 図 9 に示す (図 8 と図 9 は各 CI_{error} 毎に正規化している)．

5. おわりに

論理的整合性の最小化に限って見れば、完全情報下と同様に、真値パターンが昇順・全等のどちらであっても幾何平均型が最適と言える．

距離特性を見ると、真値パターンが全等の場合これは完全情報下と同じような結果であり、 σ または CI_{error} が小さいときは p の値に関わらず、ほ

ば同一の推定ウェイトベクトルを, σ または CI_{error} が大きくなると幾何平均型の最適性頻度が上がる.

真値パターンが昇順のときは, 初期値を真値としても第 2 真値近似解がかなり求められていると思われる. $p = 4$ 付近のピークが第 2 真値近似解によるものと考えれば, やはり完全情報下と同じく幾何平均型が最適であると考えられる.

我々の提案した行毎 p 次一般化平均正規化反復代入ウェイト推定法は, 欠落要素を w_i/w_j で置き換えることは Harker 法の, 反復させて多段階にウェイトを求めることは 2 段階法の, それぞれ拡張と考えられる. 第 1 真値近似解のみ求める (例えば Newton 法で解いてみる) ことや, 他の一対比較デザイングラフでのシミュレーション, 本手法と Harker 法との相関性などは今後の課題である.

参考文献

- [1] 三宅千香子: AHP ウェイト推定法のシミュレーション研究, 日本大学大学院 生産工学研究科 数理工学専攻 博士前期課程論文 (2001.3)
- [2] 茂木渉・篠原正明: Optimum Priority Weight Estimation Method for Pairwise Comparison Matrix, The 10th International Symposium on The Analytic Hierarchy Process (ISAHP'09) (2009.8)
- [3] 茂木渉・篠原正明: 不完全情報 AHP における整合度指標 -Harker 法への適用-, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2009 年秋季研究発表会 アブストラクト集, 1-G-9, pp.152-153(2009.9)
- [4] 篠原正明・大澤慶吉・稲嶺和哉・後藤格: 精神物理実験における真のウェイトとは?, 平成 17 年度 日本大学生産工学部 第 38 回学術講演会 数理情報部会 講演概要, pp.97-98(2005.12)
- [5] 檜崎将之: Analytic Hierarchy Process の整合度に関する研究, 日本大学大学院 生産工学研究科 数理情報工学専攻 博士前期課程論文 (2007.3)

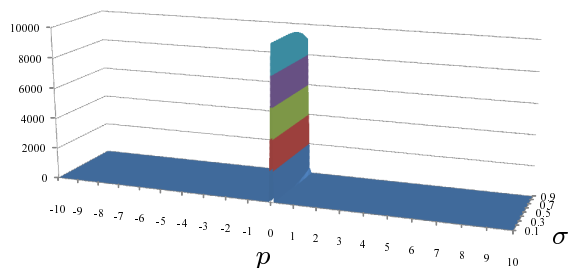


図 4. 昇順- CI_{error} 最小化頻度分布 (奥行き σ)

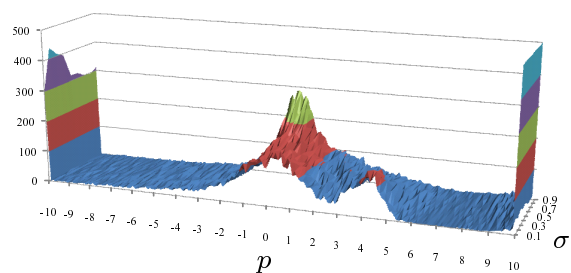


図 5. 昇順-距離最小化頻度分布 (奥行き σ)

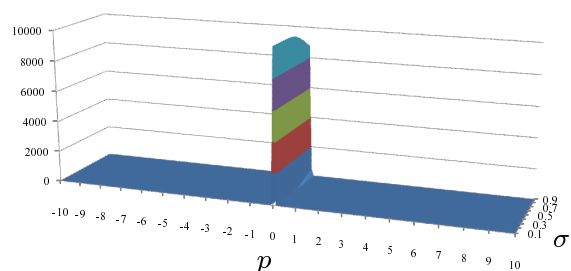


図 6. 全等- CI_{error} 最小化頻度分布 (奥行き σ)

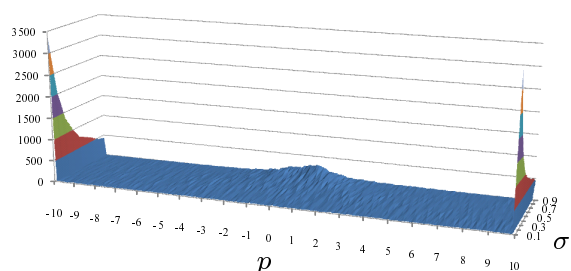


図 7. 全等-距離最小化頻度分布 (奥行き σ)

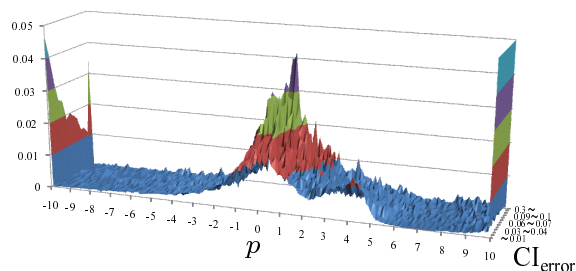


図 8. 昇順-距離最小化頻度分布 (奥行き CI_{error})

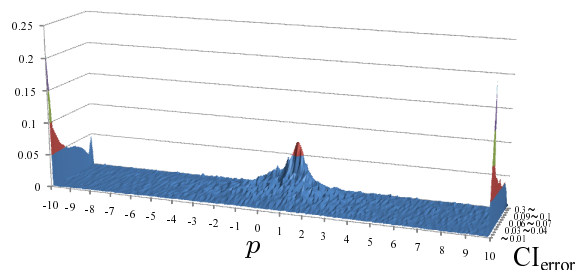


図 9. 全等-距離最小化頻度分布 (奥行き CI_{error})