7-60

真値ウェイトベクトルと推定ウェイトベクトルの情報理論的距離特性

日大生産工 (院)　○茂木　渉
日大生産工　篠原　正明

1.　はじめに

AHP(Analytic Hierarchy Process) における一対比較行列に対する最適ウェイト推定法に関する研究として，行毎一般化平均法を導入した統計的シミュレーションにより，最も真値に近く，かつ整合性を保つウェイトベクトルを与える推定法は幾何平均法であるという結果が得られた [2]．当該研究においては，真値ウェイトベクトルと推定ウェイトベクトルとのマンハッタン距離を測定することでその近接度合を考えた．本稿ではその補足として，他の距離 (ユークリッド距離・Kullback-Leibler 情報理論的距離・逆 Kullback-Leibler 情報理論的距離) を用いて測定される真値ウェイトベクトルと推定ウェイトベクトルとの近接度合について考察する．

2.　前提条件・方法論

2.1.　唯一の真値

1 つの真値ウェイトベクトル $\boldsymbol{w}(*)$ が存在すると仮定し，その真値ウェイトベクトルに対応する完全整合性を持つ一対比較行列 $\boldsymbol{W} = \{w_{ij}\}$ $(w_{ij} = w_i(*)/w_j(*))$ の各要素に誤差 (雑音) が付加した一対比較行列 $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ が観測されると仮定する．よって，複数の真値が存在する場合 (様々な意見が混在する集団を対象とするなど) や，意思決定に分裂傾向がある場合 (1 つの考えに落ち着いていないなど) は本稿の対象外とする．

2.2.　完全情報一対比較行列

一対比較行列 $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ には欠落要素が存在しない場合を考える．つまり，不完全情報一対比較行列は本研究の対象外である．また当然ながら，同項目間の一対比較値 $a_{ii} = 1$, 及び逆比性 $a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$ は成立すると仮定する．

2.3.　行毎一般化平均ウェイト推定法

一対比較行列 $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ からウェイトベクトル $\boldsymbol{w}$ を推定する方法として，行毎一般化平均法を用いる．n 個の正値データ $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ が与えられたとき，p 次一般化平均 $G(p, \boldsymbol{a})$ は次式で定義される．

$$G(p, \boldsymbol{a}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

一対比較行列 $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ の第 i 行に，この p 次一般化平均を適用して項目 i のウェイト w_i を推定する方法が行毎 p 次一般化平均ウェイト推定法である．

$$w_i = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

これにより，パラメータ p を広範囲に設定するすることで，様々なウェイトベクトル推定法を検証することができる．

2.4.　真値最適性

本稿における「最適なウェイトベクトル推定法」の 1 つとして，真値ウェイトベクトル $\boldsymbol{w}(*) = \{w_i(*)\}^{\mathsf{T}}$ と，任意の推定法”k”による推定ウェイトベクトル $\boldsymbol{w}(k) = \{w_i(k)\}^{\mathsf{T}}$ との間の距離を最小化するものを考える．$\boldsymbol{w}(*)$ と $\boldsymbol{w}(k)$ の距離として，本稿では以下の 4 つを考える．

(I) マンハッタン距離

$$d_1\big(\boldsymbol{w}(*), \boldsymbol{w}(k)\big) := \sum_{i=1}^{n} \big| w_i(*) - w_i(k) \big| \tag{3}$$

Information-Theoretic-Distance Characteristics Between True Weight Vector and Estimated Weight Vector

Wataru MOGI† and Masaaki SHINOHARA

(II) ユークリッド距離

$$d_2\big(\boldsymbol{w}(*),\boldsymbol{w}(k)\big) := \left(\sum_{i=1}^{n}\Big(w_i(*)-w_i(k)\Big)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

(III) Kullback-Leibler 情報理論的距離

$$d_{\mathrm{KL}}\big(\boldsymbol{w}(*),\boldsymbol{w}(k)\big) := \sum_{i=1}^{n} w_i(*)\ln\left(\frac{w_i(*)}{w_i(k)}\right) \tag{5}$$

(IV) 逆 Kullback-Leibler 情報理論的距離

$$d_{\mathrm{IKL}}\big(\boldsymbol{w}(*),\boldsymbol{w}(k)\big) := \sum_{i=1}^{n} w_i(k)\ln\left(\frac{w_i(k)}{w_i(*)}\right) \tag{6}$$

2.5. 論理的整合性

もう1つの「最適なウェイトベクトル推定法」の定義として，整合度指標 CI 値を最小化するものを考える．Saaty 氏の考案した CI 値の定義式をさらに一般化した $\mathrm{CI_{eigen}}$ を用いる [5].

$$\mathrm{CI_{eigen}} = \frac{\lambda_{\mathrm{ave}}-n}{n-1} \tag{7}$$

λ_{ave} は行毎近似固有値 λ_i の算術平均値であり，任意の推定ウェイトベクトルを $\boldsymbol{x}=\{x_i\}^{\mathsf{T}}$ とすると以下のように計算される．

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda_i x_i \quad (i=1,\cdots,n) \tag{8}$$

$$\lambda_{\mathrm{ave}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{n} \tag{9}$$

これら2つの最適性を考慮したシミュレーションを行う．

3. シミュレーション条件・方法

3.1. シミュレーション条件

- 一対比較対象の項目数は $n=5$ とする．
- 真値ウェイトベクトル $\boldsymbol{w}(*)$ のパターンとしては，項目ウェイトが順番に等間隔大小関係を持つ「昇順」と，すべての項目ウェイトが等しい場合「全等」を想定する．即ち，「昇順」の場合は $\boldsymbol{w}(*)=(1,2,3,4,5)^{\mathsf{T}}$,「全等」の場合は $\boldsymbol{w}(*)=(1,1,1,1,1)^{\mathsf{T}}$ である．但し，計算手順内では $\boldsymbol{w}(*)$ の各要素は総和が1になるように正規化されている．
- 完全整合性を持つ一対比較行列 $\boldsymbol{W}=\{w_{ij}\}$ の各要素毎に誤差 ε_{ij} を付加して一対比較行列 $\boldsymbol{A}=\{a_{ij}\}$ を生成するが，誤差タイプとしては，例えば，加法形誤差 $(a_{ij}=w_{ij}+\varepsilon_{ij})$ や乗法形誤差 $(a_{ij}=w_{ij}\cdot\varepsilon_{ij})$ が存在する．本研究では乗法形誤差を採用する．
- 乗法形誤差 ε_{ij} は平均値1を持つ確率分布に従う確率変数 E の実現値である．確率変数 E は区間 $[1-\sigma,1-\sigma]$ の一様分布に従うと仮定する．また，パラメータ σ を誤差度合と呼ぶ．

3.2. シミュレーション方法

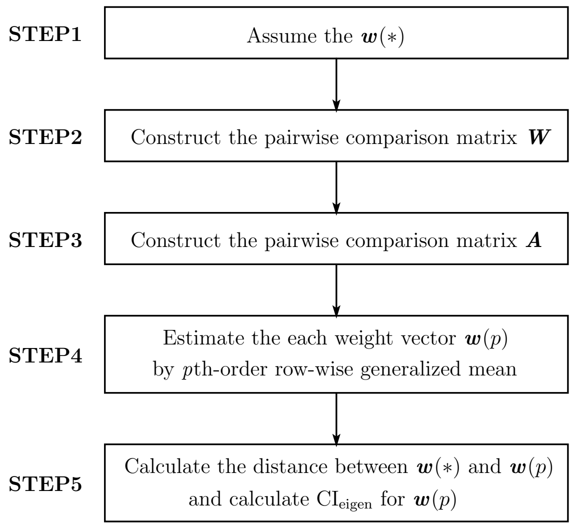

図 1. シミュレーションのフローチャート

STEP1 真値ウェイトベクトル $\boldsymbol{w}(*)$ を仮定する．

STEP2 真値ウェイトベクトル $\boldsymbol{w}(*)$ から，真値整合比較行列 $\boldsymbol{W}=\{w_{ij}\}$ $(w_{ij}=w_i(*)/w_j(*))$ を構成する．

STEP3 真値整合比較行列 $\boldsymbol{W}$ に対して，要素毎に適当な分布に従う乗法型誤差 (雑音) ε_{ij} を加えて，標本測定行列 $\boldsymbol{A}=\{a_{ij}\}$ $(a_{ij}=w_{ij}\times\varepsilon_{ij})$ を生成する．但し，逆比性 $(a_{ij}\cdot a_{ji}=1)$ は保存する．

STEP4 標本測定行列 $\boldsymbol{A}$ に行毎 p 次一般化平均

$$w_i(p) = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{10}$$

を適用し，推定ウェイトベクトル $\boldsymbol{w}(p) = \{w_i(p)\}^{\mathsf{T}}$ を計算する．

STEP5 仮定した真値ウェイトベクトル $\boldsymbol{w}(*)$ と推定ウェイトベクトル $\boldsymbol{w}(p)$ との間の (I)〜(IV) の距離をそれぞれ測定する．また，近似固有値に基づく整合度尺度 $\mathrm{CI_{eigen}}(p)$ を次式で計算する．

$$\mathrm{CI_{eigen}}(p) = \frac{\lambda_{\mathrm{ave}} - n}{n-1} \qquad (11)$$

さらに，距離を最小化するパラメータ p とそれに対応する $\mathrm{CI_{eigen}}$ 毎に振り分けを行う．

4. シミュレーション結果

シミュレーション結果を図 2〜図 9 の等高線図で示す．横軸に p，縦軸に度数，奥行きに $\mathrm{CI_{eigen}}$ をとっている (但し，度数は各 $\mathrm{CI_{eigen}}$ 値毎に正規化している)．いずれの場合も，一般化平均パラメータ p は区間 $[-10, +10]$，刻み幅 0.1 としている．また，誤差度合 σ は区間 [0.1, 0.9]，刻み幅 0.1 とし，各 σ に対して標本数=10000 である．奥行き $\mathrm{CI_{eigen}}$ の振り分け区間は，$[0, \infty)$ を 13 分割し，[0 , 0.01] , (0.01 , 0.02] , (0.02 , 0.03] , . . . , (0.09 , 0.1] , (0.1 , 0.2] , (0.2 , 0.3] , $(0.3, \infty)$ としている．

5. 考察

シミュレーション結果を比較すると，昇順・全等のいずれの場合でも，どの距離を考えてもほとんど同じ等高線図が得られた．

昇順の場合，d_1 と d_2，d_{KL} と d_{IKL} が，それぞれ特に似た形状となっているように見える．d_{KL} 及び d_{IKL} のほうが，$\mathrm{CI_{eigen}}$ が大きいときにおいて $p = 0$ 付近の尖度が高く，$p = -10$ での度数が小さくなっている．

全等の場合，昇順以上に明確な違いは見られないほど似通っている．敢えていうならば，$\mathrm{CI_{eigen}}$ が大きいときにおいて，d_{KL} 及び d_{IKL} のほうがより $p = 0$ 付近の尖度が (数%程度だが) 高くなっている．

6. おわりに

本稿では，真値ウェイトベクトルと推定ウェイトベクトルの間に 4 つの距離を考え，改めて距離特性についてシミュレーションした．結果はどの距離をとっても，昇順の場合は誤差度合や整合度に関わらず，幾何平均法が最も真値に近い推定値を与える．全等の場合は，誤差度合や整合度が小さいとき，つまり項目ウェイト間に差がないと予想される場合はどの手法でもほぼ同じ推定頻度となり，大きくなるにつれて幾何平均法の推定力が高くなる．

よって統計的に考えて，幾何平均法 (もしくはそれに近似したウェイトベクトルを推定する固有ベクトル法) が最適であるといえる．

参考文献

[1] 三宅千香子：AHP ウェイト推定法のシミュレーション研究，日本大学大学院 生産工学研究科 数理工学専攻 博士前期課程論文 (2001.3)

[2] 茂木渉・篠原正明：Optimum Priority Weight Estimation Method for Pairwise Comparison Matrix，The 10th International Symposium on The Analytic Hierarchy Process(ISAHP'09) (2009.8)

[3] 篠原正明・大澤慶吉・稲嶺和哉・後藤格：精神物理実験における真のウェイトとは?，平成 17 年度 日本大学生産工学部 第 38 回学術講演会 数理情報部会 講演概要，pp.97-98(2005.12)

[4] 槍﨑将之：Analytic Hierarchy Process の整合度に関する研究，日本大学大学院 生産工学研究科 数理情報工学専攻 博士前期課程論文 (2007.3)

[5] 槍﨑将之・大澤慶吉・篠原正明：近似固有値にもとづく CI 値と要素誤差平均にもとづく CI 値の等価性，平成 19 年度 日本大学生産工学部 第 41 回学術講演会 数理情報部会 講演概要，pp.79-82(2007.12)

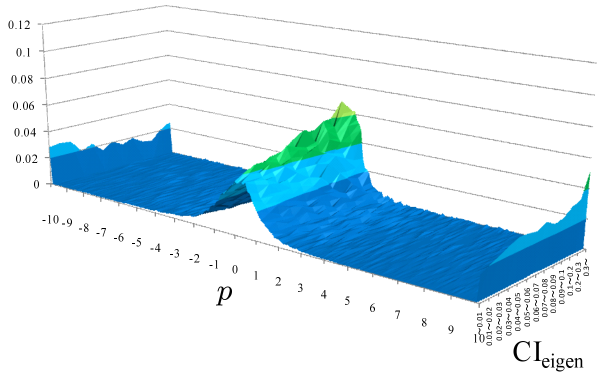

図 2. 昇順-d_1

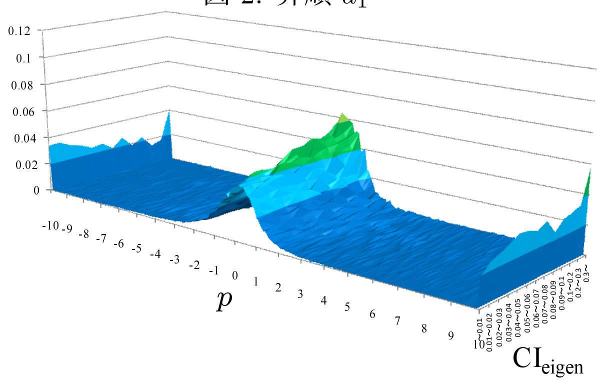

図 3. 昇順-d_2

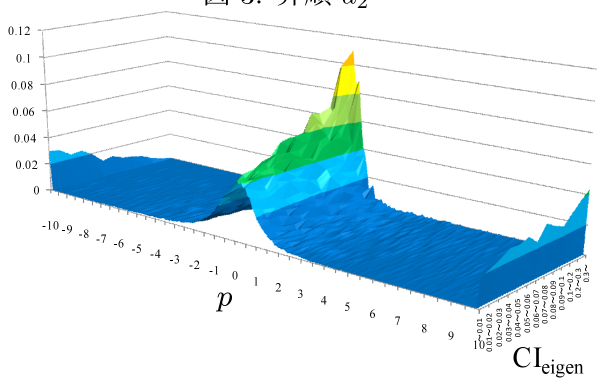

図 4. 昇順-d_{KL}

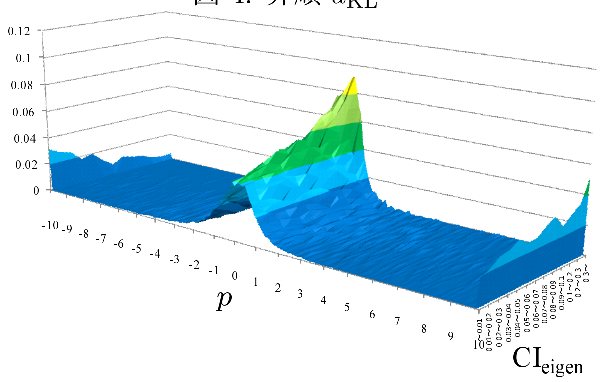

図 5. 昇順-d_{IKL}

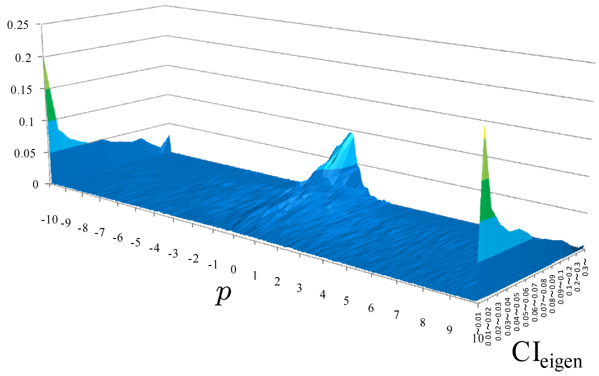

図 6. 全等-d_1

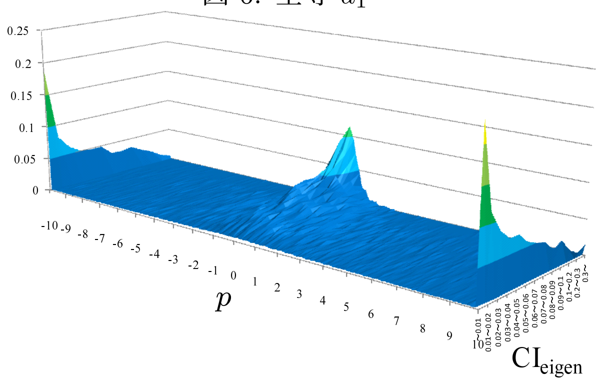

図 7. 全等-d_2

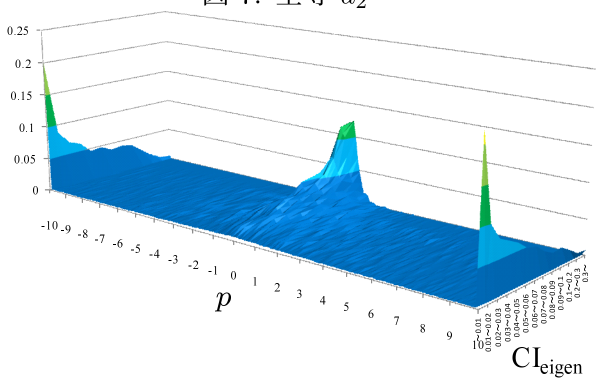

図 8. 全等-d_{KL}

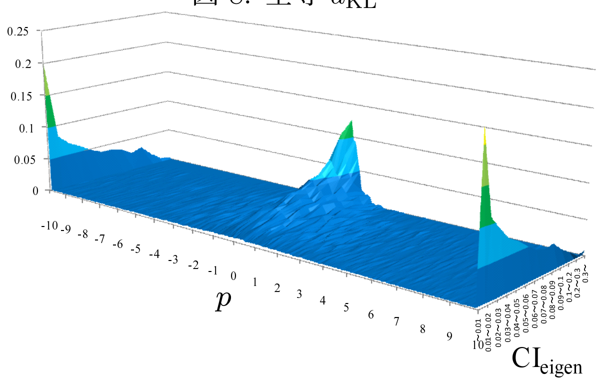

図 9. 全等-d_{IKL}