

AHP 固有ベクトル法の一般化平均に基づく一般化(その 1)

日大生産工(院)

金成 賢作

日大生産工

篠原 正明

1. はじめに

固有値問題は式(1)のように表わされる。固有値問題の各状態が、時間軸上を連続的に遷移すると考える。状態遷移の様子を式で表現すると図 1 のようになる。1 秒での状態が 2 秒での状態、2 秒での状態が 3 秒での状態を発生させるといった具合だ。つまり t 秒での状態は、1 つ前の($t-1$)秒の状態に依存しているのだ。このことは式(2)のように表わされる。

状態遷移を幾度も繰り返すとベクトル \mathbf{x} の増加度合(あるいは減少度合)が一定に収束すると考えられる。この時点での増加度合(あるいは減少度合)が固有値 λ である。本研究のように状態遷移に見立て計算を繰り返し行い、固有値を求める手法を反復法と呼ぶ。

式(2)を変形させていくと、式(3)のような一般化平均の構造を見出せる。よって、反復法は算術平均・幾何平均・調和平均等から、計算方法を自由に選択できるものと推測される。本研究では反復法における計算法の一般化と、固有値の収束過程にどのような関係性があるのか、考察を試みる(付録参照)。

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad (1)$ $\mathbf{A}\mathbf{x}_{(t-1)} = \mathbf{x}(t) \quad (2)$ $\frac{1}{n} \mathbf{A}' \mathbf{x}_{(t-1)} = \mathbf{x}(t)$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> $\frac{1}{n} \mathbf{A}' \mathbf{x}(t) = \lambda \mathbf{x}(t)$ </div>	<p style="text-align: center;">Generalized Mean (3)</p> $\begin{cases} \frac{1}{2} \times \{a'_{11}x_1(t) + a'_{12}x_2(t)\} = \lambda x_1(t) \\ \frac{1}{2} \times \{a'_{21}x_1(t) + a'_{22}x_2(t)\} = \lambda x_2(t) \end{cases}$ <p style="text-align: center;">↓</p> $\begin{cases} \left\{ \frac{1}{2} \times (b_{11}^p + b_{12}^p) \right\}^{1/p} = \lambda x_1 \\ \left\{ \frac{1}{2} \times (b_{21}^p + b_{22}^p) \right\}^{1/p} = \lambda x_2 \end{cases}$
--	--

Figure1: Iterative Method

2. 一般化平均の紹介

平均値にはいくつかの種類が存在し、代表的なものとして算術平均・幾何平均・調和平均が存在する。 n 個のデータ x_1, x_2, \dots, x_n に対する算術平均・幾何平均・調和平均を式(4),(5),(6)として定義する。

$$\text{Arithmetic Mean: } \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (4)$$

$$\text{Geometric Mean: } \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n} \quad (5)$$

$$\text{Harmonic Mean: } \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \quad (6)$$

算術平均はデータがどのような実数であっても定義される。幾何平均は正值データの場合に限り定義され、調和平均は $x_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) を満たす i が存在しない時に定義される。なお、算術平均は相加平均、幾何平均は相乗平均とも呼ばれる。

一般化平均とは算術平均・幾何平均・調和平均の 3 つの概念を一般化したものである。 n 個のデータに対する一般化平均を以下に式(7)として定義する。変数 m に 1 を代入すると算術平均、-1 を代入すると調和平均、0 の極限を代入すると幾何平均になる。

$$\text{Generalized Mean: } \sqrt[m]{\frac{x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m}{n}} \quad (7)$$

3. 算出方法の説明

第1節でも触れたように本研究では反復法における計算方法の選択と固有値の収束過程について考察する。反復法で用いる計算方法としては、第2節で紹介した算術平均・幾何平均・調和平均・一般化平均に加えて、合計・最大値・最小値も用いることにした。固有値と固有ベクトルの算出方法を以下に記す。

(Step 1) 比較行列 A と初期ベクトルを作成する。

(Step 2) 比較行列 1 行目と $x(t)$ ベクトルを用いて、 $x(t+1)$ ベクトルの第 1 要素を求める。

その際、選択した計算方法に応じた算出法を用いる。仮に算術平均を選択した場合、図 2 のようになる。同様にして、 $x(t+1)$ の第 2 要素、第 3 要素、第 4 要素も算出する。

(Step 3) $x(t)$ ベクトルと $x(t+1)$ ベクトルを除算し、 $\lambda(t)$ 比率ベクトルを算出する。

(Step 4) $\lambda(t)$ 比率ベクトルの全要素が収束するまで Step 2, 3 を繰り返し行う。全要素が収束した時点での $x(t)$ ベクトルが固有ベクトル、 $\lambda(t)$ 比率ベクトルが固有値となる。

今回の研究ではExcelを用いて計算を行った。比率ベクトルの一一致を確認する際には小数点以下 4 衡までを比較の対象とした。比較行列は行列 A_1, A_2, A_3, A_4 の 4 種類を用意し、整合性のとれた行列として A_1 を、整合性のとれていない行列として A_2, A_3, A_4 を用いた。比較行列 A_1 を式(8)として以下に示す。

なお、本研究は考察を行った比較行列の種類に応じ、研究その 1 と研究その 2 に分かれている。その 1 では整合性のとれた比較行列(行列 A_1)を取り上げて考察を行う。整合性のとれていない比較行列(行列 A_2, A_3, A_4)に関しては研究その 2 で考察を行う。

$$\text{Matrix } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 1/2 & 1 & 3 & 1 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

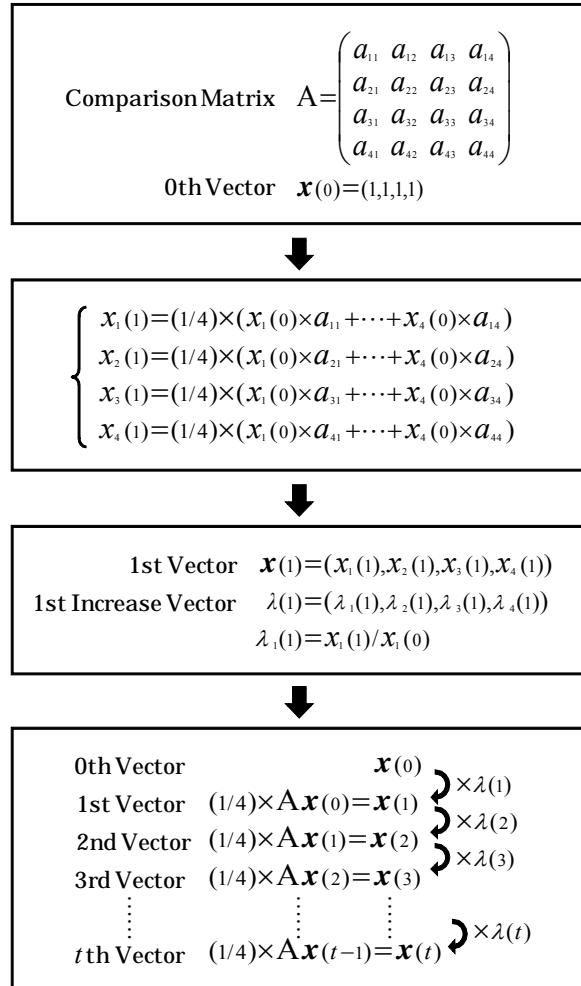


Figure2: Flow Chart

4. 算出結果の掲載

比較行列 A_1 (整合性あり)による $x(t)$ ベクトルと $\lambda(t)$ 比率ベクトルの算出結果を表 1~7 として掲載した。反復回数の範囲は 1~20 回とした。なお、一般化平均を用いた計算では変数 $m=1$ としたため、一般化平均による結果は算術平均による結果と同様である。

- Table1: 合計を用いた計算結果
- Table2: 算術平均を用いた計算結果
- Table3: 幾何平均を用いた計算結果
- Table4: 調和平均を用いた計算結果
- Table5: 一般化平均を用いた計算結果
- Table6: 最大値を用いた計算結果
- Table7: 最小値を用いた計算結果

Table1: Sum

n	X_1	X_2	X_3	X_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
0	1	1	1	1	—	—	—	—
1	11	5.5	1.833333	5.5	11	5.5	1.83	5.5
2	44	22	7.333333	22	4	4	4	4
3	176	88	29.33333	88	4	4	4	4
4	704	352	117.3333	352	4	4	4	4
5	2816	1408	469.3333	1408	4	4	4	4
6	11264	5632	1877.3333	5632	4	4	4	4
7	45056	22528	7509.3333	22528	4	4	4	4
8	180224	90112	30037.333	90112	4	4	4	4
9	720896	360448	120149.33	360448	4	4	4	4
10	2883584	1441792	480597.33	1441792	4	4	4	4
11	11534336	5767168	1922389.3	5767168	4	4	4	4
12	46137344	23068672	7689557.3	23068672	4	4	4	4
13	184549376	92274688	30758229	92274688	4	4	4	4
14	73817504	369098752	12032917	369098752	4	4	4	4
15	2.958E+09	1.478E+09	492131699	1.478E+09	4	4	4	4
16	1.181E+10	5.908E+09	1.969E+09	5.908E+09	4	4	4	4
17	4.724E+10	2.362E+10	7.874E+09	2.362E+10	4	4	4	4
18	1.89E+11	9.449E+10	3.15E+10	9.449E+10	4	4	4	4
19	7.559E+11	3.78E+11	1.28E+11	3.78E+11	4	4	4	4
20	3.024E+12	1.512E+12	5.039E+11	1.512E+12	4	4	4	4

Table4: Harmonic Mean

n	X_1	X_2	X_3	X_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
0	1	1	1	1	—	—	—	—
1	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1.85	0.92	0.31	0.92
2	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1	1	1	1
3	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1	1	1	1
4	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1	1	1	1
5	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1	1	1	1
6	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1	1	1	1
7	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1	1	1	1
8	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1	1	1	1
9	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1	1	1	1
10	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1	1	1	1
11	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1	1	1	1
12	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1	1	1	1
13	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1	1	1	1
14	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1	1	1	1
15	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1	1	1	1
16	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1	1	1	1
17	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1	1	1	1
18	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1	1	1	1
19	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1	1	1	1
20	1.8461538	0.9230769	0.3076923	0.9230769	1	1	1	1

Table2: Arithmetic Mean

n	X_1	X_2	X_3	X_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
0	1	1	1	1	—	—	—	—
1	2.75	1.375	0.4583333	1.375	2.75	1.38	0.46	1.38
2	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
3	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
4	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
5	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
6	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
7	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
8	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
9	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
10	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
11	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
12	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
13	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
14	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
15	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
16	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
17	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
18	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
19	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
20	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1

Table5: Generalized Mean

n	X_1	X_2	X_3	X_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
0	1	1	1	1	—	—	—	—
1	2.75	1.375	0.4583333	1.375	2.75	1.38	0.46	1.38
2	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
3	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
4	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
5	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
6	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
7	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
8	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
9	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
10	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
11	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
12	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
13	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
14	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
15	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
16	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
17	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
18	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
19	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1
20	2.75	1.375	0.4583333	1.375	1	1	1	1

Table3: Geometric Mean

n	X_1	X_2	X_3	X_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
0	1	1	1	1	—	—	—	—
1	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	2.21	1.11	0.37	1.11
2	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	1	1	1	1
3	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	1	1	1	1
4	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	1	1	1	1
5	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	1	1	1	1
6	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	1	1	1	1
7	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	1	1	1	1
8	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	1	1	1	1
9	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	1	1	1	1
10	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	1	1	1	1
11	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	1	1	1	1
12	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	1	1	1	1
13	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	1	1	1	1
14	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	1	1	1	1
15	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	1	1	1	1
16	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	1	1	1	1
17	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	1	1	1	1
18	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	1	1	1	1
19	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	1	1	1	1
20	2.2133638	1.106819	0.368894	1.106819	1	1	1	1

Table6: Max

n	X_1	X_2	X_3	X_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4

<tbl_r cells="9" ix="1" maxcspan="1" maxrspan="

Table7: Min

n	X_1	X_2	X_3	X_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
0	1	1	1	1	—	—	—	—
1	1	0.5	0.1666667	0.5	1	0.5	0.17	0.5
2	1	0.5	0.1666667	0.5	1	1	1	1
3	1	0.5	0.1666667	0.5	1	1	1	1
4	1	0.5	0.1666667	0.5	1	1	1	1
5	1	0.5	0.1666667	0.5	1	1	1	1
6	1	0.5	0.1666667	0.5	1	1	1	1
7	1	0.5	0.1666667	0.5	1	1	1	1
8	1	0.5	0.1666667	0.5	1	1	1	1
9	1	0.5	0.1666667	0.5	1	1	1	1
10	1	0.5	0.1666667	0.5	1	1	1	1
11	1	0.5	0.1666667	0.5	1	1	1	1
12	1	0.5	0.1666667	0.5	1	1	1	1
13	1	0.5	0.1666667	0.5	1	1	1	1
14	1	0.5	0.1666667	0.5	1	1	1	1
15	1	0.5	0.1666667	0.5	1	1	1	1
16	1	0.5	0.1666667	0.5	1	1	1	1
17	1	0.5	0.1666667	0.5	1	1	1	1
18	1	0.5	0.1666667	0.5	1	1	1	1
19	1	0.5	0.1666667	0.5	1	1	1	1

5. 考察

第4節の算出結果を交え、比較行列 A_1 (整合性あり)を用いた場合の、計算方法の選択と固有値の収束過程について考察する。収束に要する反復回数と固有値を、表8として掲載した。反復回数は計算法に依らず2回となった。よって、僅かな回数を経るだけで値が収束することが分かる。固有値に関しては合計の場合が4、それ以外の場合は1となった。合計以外の計算法ではデータ数 $n=4$ で除算したものが固有値となる。よって、計算法に依らず固有値4になったことが分かる。なお、固有値4とは理論値4と同値である。

固有ベクトルと、正規化後の固有ベクトルを表9,10として掲載した。固有ベクトル自体は計算法によって様々な値を記録しているが、全要素和が1になるよう正規化すると表10が示すように、全計算法において同じ値となった。そのため、固有ベクトル内の要素間の比率は、計算法に関わらず同じだと言える。

Table8: Result

	Sum	Arithmetic	Geometric	Harmonic	Generalized	Max	Min
Sum	2	2	2	2	2	2	2
igenvalu	4	1	1	1	1	1	1

Table9: Eigenvector

	Sum	Arithmetic	Geometric	Harmonic	Generalized	Max	Min
C	44	2.75	2.213363839	1.846153846	2.75	6	1
C	22	1.375	1.10668192	0.923076923	1.375	3	0.5
C	7.333333333	0.458333333	0.368893973	0.307692308	0.458333333	1	0.166666667
C	22	1.375	1.10668192	0.923076923	1.375	3	0.5

Table10: Normalization

	Sum	Arithmetic	Geometric	Harmonic	Generalized	Max	Min
C	0.461538462	0.461538462	0.461538462	0.461538462	0.461538462	0.461538462	0.461538462
C	0.230769231	0.230769231	0.230769231	0.230769231	0.230769231	0.230769231	0.230769231
C	0.076923077	0.076923077	0.076923077	0.076923077	0.076923077	0.076923077	0.076923077
C	0.230769231	0.230769231	0.230769231	0.230769231	0.230769231	0.230769231	0.230769231

参考文献

- 木下栄蔵, AHP の理論と実際, 日科技連 (2000)
- 三宅千香子, AHP ウェイト推定法のシミュレーション研究, 日本大学 生産工学研究科 数理情報工学専攻 平成 12 年度 博士前期課程修士論文 (2001.3)

付録: AHP 固有ベクトル法の必然性

完全情報一対比較行列 $A=\{a_{ij}\}$ を前提に A に対応する項目ウェイト x を推定する評価プロセスを考えよう。最初は x が未知数なので、一定値からなるベクトル(ex. $(1, 1, 1, \dots, 1)^T$)を仮定する。注目する項目 i のウェイトは項目 j から見た項目 i の比較値が a_{ij} なので、項目 j からの寄与が $a_{ij}x_j$ 、すべての項目 j ($j=1, \dots, n$)からの寄与が $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ となる。すなわち、評価プロセスは以下の反復式となる。

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t-1) \quad (A.1)$$

ベクトル行列表現すれば次式を得る。

$$x(t) = Ax(t-1) \quad (A.2)$$

本式(A.2)は本文中の(2)と同じであり、AHPの一対比較行列 A に対する項目ウェイト x が固有ベクトルである必然性が判る。なお、以上の議論は、Saaty 博士が常日頃主張されている内容ではあるが、言葉による説明と数学的定式化の間に乖離が存在し、固有ベクトル法の正当性が広く理解されない一因となっている。

本論文では(A.1)式のプロセスを「周囲の判定値から平均をとり、ウェイトを更新する」と新解釈することにより、固有ベクトル法の正当性を再認識すると共に、従来の固有ベクトル法を一般化平均の算術平均の場合とするより一般的な平均法(一般化平均)の枠組で一般化するアプローチを提案した。