

AHP 比較行列の最悪整合度指標

日大生産工(学部) ○齋藤 芙実加

日大生産工 篠原 正明

1. はじめに

AHPとはAnalytic Hierarchy Processの略で意思決定手法の一つである。1971年に米国ピッツバーグ大学のT.L.Saaty教授により提唱された。問題の構造を把握し難いときでも、問題全体を評価基準、代替案という階層図に表現することで明らかにし、複数の評価基準のもと多数の代替案の中から数学的に選択する。本論文ではこのAHP意思決定手法を用いた場合の要素誤差に一般化平均法を適用し、最悪整合度指標などを評価する方法を提案する。

2. 3×3の一对比較行列

最初に3×3の一对比較行列で考える。下記のような一对比較行列がある。

A =

1	3	5
1/3	1	1
1/5	1	1

表1. 一对比較行列

はじめに行和を求めると、行毎算術平均値ベクトルより表2のような一对比較推定行列Wを求めることができる。

W =

1	3.86	4.09
0.26	1	1.06
0.24	0.94	1

表2. 一对比較推定行列

要素毎の誤差は(1)式のように求めることができる。

$$e_{ij} = \frac{a_{ij}}{w_{ij}} \quad (1)$$

一对比較行列Aと一对比較推定行列Wを用いて要素毎の誤差を求めることで乗法的誤差行列Eができる。

E =

1	0.78	1.22
1.29	1	0.94
0.82	1.06	1

表3. 乗法的誤差行列

さらに一般化平均を用いて要素誤差平均を求める。一般化平均は相加・相乗・調和の平均概念を一般化したもので下記のような式が成り立つ。

$$\text{一般化平均 } \alpha = (a_1, \dots, a_n) > 0 \quad (2)$$

$$G(\alpha, p) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3)$$

pの値を $-\infty$ に限りなく近づけると最小値を求めることができ、 ∞ に近づけると最大値、0に近づけると幾何平均を求めることができる。また、pの値が-1のときには調和平均、1のときには算術平均を求めることができる。

これらをもとにpが-10,-2,-1,-0.1,0.1,1,2,10,100のときの要素誤差平均を(4)の式を用いて求める。

$$G(\alpha, p) = \left[\left\{ \left(\frac{e_{12} + e_{21}}{2} \right)^p + \left(\frac{e_{13} + e_{31}}{2} \right)^p + \left(\frac{e_{23} + e_{32}}{2} \right)^p \right\} + 3 \right]^{\frac{1}{p}} \quad (4)$$

Worst Consistency Index for AHP Pairwise Comparison Matrix

Fumika SAITOU and Masaaki SHINOHARA

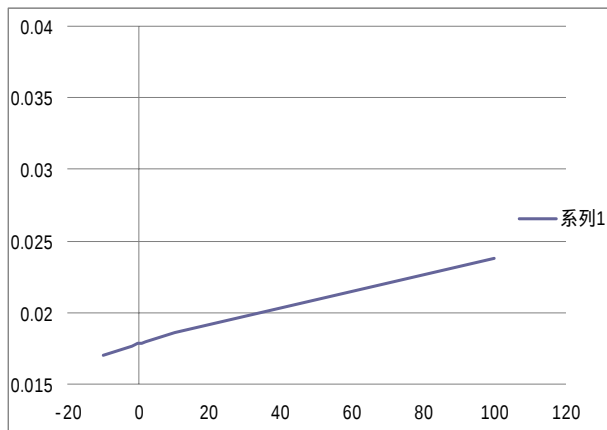


図 1. 要素誤差平均の変化

3. 6×6の一対比較行列

次に6×6の一対比較行列では要素誤差がどのように変化するか、3×3のときと同様に求める。

A	1	3	7	7	3	9
	1/3	1	5	5	1	9
	1/7	1/5	1	3	1/5	3
	1/7	1/5	1/3	1	1/7	1/3
	1/3	1	5	7	1	9
	1/9	1/9	1/3	3	1/9	1

表 4. 6×6の一対比較行列

行和より行毎算術ベクトルを用いて一対比較推定行列 W を求める。

W	1	1.40625	3.97727	13.93805	1.28571	6.42857
	0.71111	1	2.82828	9.91150	0.91428	4.57142
	0.25142	0.35357	1	3.50442	0.32326	1.61632
	0.07174	0.10089	0.28535	1	0.09224	0.46122
	0.77778	1.09375	3.09343	10.84070	1	5
	0.15556	0.21875	0.61868	2.16814	0.2	1

表 5. 一対比較推定行列

(1) 式を用いて要素毎の誤差を求め乗法的誤差行列 E を求める。

E	1	2.13333	1.76	0.50222	2.33333	1.4
	0.46875	1	1.76785	0.50446	1.09375	1.96875
	0.56818	0.56565	1	0.85606	0.61868	1.85606
	1.99115	1.98230	1.16814	1	1.54867	0.72271
	0.42857	0.91428	1.61632	0.64571	1	1.8
	0.71428	0.50793	0.20622	1.38367	0.55555	1

表 6. 乗法的誤差行列

(5) 式を用いて一般化平均を用いて p が -100,-10,-2,-1,-0.1,0.1,1,2,10,100 のときの要素誤差平均を求める。

$$\sigma(\alpha, p) = \left[\left\{ \left(\frac{e_{12} + e_{21}}{2} \right)^p + \left(\frac{e_{13} + e_{31}}{2} \right)^p + \left(\frac{e_{14} + e_{41}}{2} \right)^p + \left(\frac{e_{15} + e_{51}}{2} \right)^p + \left(\frac{e_{16} + e_{61}}{2} \right)^p + \left(\frac{e_{23} + e_{32}}{2} \right)^p + \left(\frac{e_{24} + e_{42}}{2} \right)^p + \left(\frac{e_{25} + e_{52}}{2} \right)^p + \left(\frac{e_{26} + e_{62}}{2} \right)^p + \left(\frac{e_{34} + e_{43}}{2} \right)^p + \left(\frac{e_{35} + e_{53}}{2} \right)^p + \left(\frac{e_{36} + e_{63}}{2} \right)^p + \left(\frac{e_{45} + e_{54}}{2} \right)^p + \left(\frac{e_{46} + e_{64}}{2} \right)^p + \left(\frac{e_{56} + e_{65}}{2} \right)^p \right\} - 15 \right]^{\frac{1}{p}} \quad (5)$$

p	-100	0.027185363
	-10	0.104383556
	-2	0.137762913
	-1	0.142649744
	-0.1	0.14714871
	0.1	0.14815997
	1	0.152755477
	2	0.157932994
	10	0.19937956
	100	0.344093029

表 7. 要素誤差平均計算結果

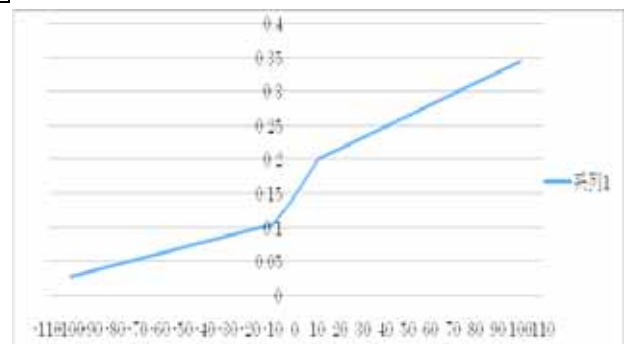


図 2. 要素誤差平均の変化

4. 考察

図 2 で p=100 付近で C I 値, 0.35, となるが、これは表 6 の乗法的誤差行列の最悪整合度指標 $((e_{15} + e_{51})/2) - 1 = 0.38$ に対応する。通常の整合度指標は p=1 の C I 値 = 0.152 であるが、一般化平均を用いた要素誤差平均を使えば、このように、(1, 5) 要素に起因する **最悪整合度指標** を評価できる。

5. おわりに

一般化平均を用いた要素誤差平均により、最悪、平均、最良、さらには分布など、幅広い整合度指標を提供出来ることを示した。