7-55

積型ネットワーク効率関数を用いたネットワークDEAの相対効率値最大化問題定式化

日大生産工 (院)　○茂木　渉　日大生産工　大澤　慶吉
日大生産工　篠原　正明

1.　はじめに

従来のDEA(Data Envelopment Analysis)は被評価対象となるDMU(Decision Making Unit)の内部構造を考慮せず，入出力のみを用いて分析することからブラックボックスDEAと呼ばれ，これに対して，DMUのネットワーク構造を考慮した多入出力間効率性評価を行う手法がネットワークDEAである．既存研究[1,2]ではネットワーク効率関数を積関数として定義し，データに対する評価値を離散的に与えて相対効率値を計算する「離散評点ネットワークDEA」を提案した．本稿では，積型ネットワーク効率関数を導入した上で，評価値を連続的に与える「連続評点ネットワークDEA」の相対効率値評価問題を定式化する．

2.　積型ネットワーク効率関数

2.1.　ネットワークの定義

リンク$i (i = 1, \ldots, m)$に対応するデータ値(スカラー値に限定せずにベクトル値も許容する)を$\boldsymbol{z}_i$，DMU_j $(j = 1, \ldots, n)$に対応するリンクデータiを$\boldsymbol{z}_{ij}$，リンクデータ項目iに対する評価値を$\boldsymbol{w}_i$と表記する．また，部門ノード集合$\mathbb{V} = \{1, \ldots, N\}$，取引リンク集合$\mathbb{L}$，リンクデータベクトル$\boldsymbol{Z}$，リンク評価ベクトル$\boldsymbol{W}$を持つ評価対象となるネットワークを$N(\mathbb{V}, \mathbb{L}; \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{W})$で表現する．

$N(\mathbb{V}, \mathbb{L}; \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{W})$に新しい仮想部門ノード0を追加し，すべての入力リンクはノード0から出発し，すべての出力はノード0に到着すると考え，このネットワークを$N(\mathbb{V}^+, \mathbb{L}; \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{W})$と表記する(但し，$\mathbb{V}^+ = \mathbb{V} + 0$)．

リンク総価値ベクトル$\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_m)^\mathsf{T}$を$q_i = \boldsymbol{z}_i^\mathsf{T} \boldsymbol{w}_i$と定義する．ここで，$q_i$はリンク添字表現したリンク$i$の総価値であるが，これを「発ノード$j$，着ノード$k$」のノード対添字リンク$(j \to k)$の総価値$q(j, k)$と再表現し，この行列を$\boldsymbol{Q}$とする．

2.2.　価値フローマルコフ連鎖

$(N+1) \times (N+1)$行列$\boldsymbol{Q}$の行毎の和が1になるように正規化した行列を$\boldsymbol{P} = \{p_{ij}\}$とすると，$p_{ij} \geqq 0$ならば確率行列となる．行列$\boldsymbol{P}$に対応する定常状態確率ベクトル$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_N)^\mathsf{T}$は，

$$\boldsymbol{P}^\mathsf{T} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \tag{1}$$

を確率条件

$$\boldsymbol{\xi}^\mathsf{T} \boldsymbol{x} = 1 \quad \Bigl(\boldsymbol{\xi} = (0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{N})^\mathsf{T}\Bigr) \tag{2}$$

の下で解くことにより求まる．このx_kは部門ノードkの総価値フローに関する重み(複式簿記・取引ネットワークにおいて，各勘定科目ノードのキャッシュフローの流動性から見た重要度，即ち，キャッシュの滞留度合)を表す．

2.3.　価値フロー固有ベクトル

2.2節の代替法として，行列$\boldsymbol{Q}^\mathsf{T}$の右主固有ベクトルを用いる方法が考えられる．即ち，固有値問題

$$\boldsymbol{Q}^\mathsf{T} \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{3}$$

を解き，主固有値$\lambda_{\max}$に対応する固有ベクトル$\boldsymbol{x}$を(2)式で正規化する．ここで，行列$\boldsymbol{Q}^\mathsf{T}$は既約な非負行列なので，Perron-Frobeniusの定理より$\lambda_{\max} \in \mathbb{R}_+$に対応する固有ベクトル$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^{N+1}$が存在することが保証され，さらに右主固有ベクトルを求めるだけならPower法によって簡単に計算することもできる(但し，$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$，$\mathbb{R}_+^{N+1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N+1} \mid \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}\}$である)．

2.4.　積型ネットワーク効率関数の定義

部門ノードkの部門別(絶対)効率値$f_k (k = 1, \ldots, N)$を(4)式で，積型ネットワーク効率関数A_{product}を(5)式で定義する．

Formulation of Relative Efficiency Value Maximization Problem for Network DEA with Product-type Network Efficiency Function

Wataru MOGI†, Keikichi OSAWA and Masaaki SHINOHARA

$$f_k = \frac{\sum_j q(k,j)}{\sum_j q(j,k)} \tag{4}$$

$$A_{\text{product}} = \prod_{k=1}^{N} f_k^{x_k} \tag{5}$$

3. 相対効率値最大化問題定式化

3.1. 原形定式化

被評価対象となる DMU_o に対する絶対効率値を A_o とすると，ある評価値 $\boldsymbol{W}$ が与えられたときの全 $\mathrm{DMU}(j=1,\ldots,n)$ に対する DMU_o の最大効率値を基準とした相対効率値 R_o は次式となる．

$$R_o(\boldsymbol{W}) = \frac{A_o}{\max_j\{A_j\}} \tag{6}$$

DEA では DMU_o にとって最も好意的な，即ち，その効率値を最大にするように重み付けをすることを許容する．以上をまとめると，以下の非線形計画問題 NLP-1 として定式化される．

NLP-1

$$\max \quad \frac{\left.\prod_{k=1}^{N} f_k^{x_k}\right|_o}{\max_j\left\{\left.\prod_{k=1}^{N} f_k^{x_k}\right|_j\right\}} \tag{7}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{w}_i \geqq \boldsymbol{0} \quad (i=1,\ldots,m) \tag{8}$$

3.2. 変形定式化

3.1 節の原形定式化に基づき，すべての DMU の絶対効率値を 1 以下に押さえる制約条件の下で DMU_o の絶対効率値を最大化する非線形計画問題 NLP-2 を考える．

NLP-2

$$\max \quad \left.\prod_{k=1}^{N} f_k^{x_k}\right|_o \tag{9}$$

$$\text{s.t.} \quad \left.\prod_{k=1}^{N} f_k^{x_k}\right|_j \leqq 1 \quad (j=1,\ldots,n) \tag{10}$$

$$\boldsymbol{w}_i \geqq \boldsymbol{0} \quad (i=1,\ldots,m) \tag{11}$$

つまり，最適な目的関数値は高々1であることを意味する．しかし，NLP-2 には定数倍の不定性が存在するため，このまま解くことは困難である．そこで，以下のように問題を変形する．まず，f_k を

$$f_k := \frac{g_k}{h_k} \tag{12}$$

と再定義する ($g_k := \sum_j q(k,j)$,$h_k := \sum_j q(j,k)$)．これより (10) 式の制約条件は

$$\left.\prod_{k=1}^{N} \frac{g_k^{x_k}}{h_k^{x_k}}\right|_j \leqq 1 \tag{13}$$

となり，分母が各 j について正ならば，分母を払って (14) 式を得る．

$$\left.\prod_{k=1}^{N} g_k^{x_k}\right|_j - \left.\prod_{k=1}^{N} h_k^{x_k}\right|_j \leqq 0 \tag{14}$$

ここで，目的関数の分母を 1 と固定して制約条件に移し，分子のみを目的関数にすると，非線形計画問題 NLP-3 を得る．

NLP-3

$$\max \quad \left.\prod_{k=1}^{N} g_k^{x_k}\right|_o \tag{15}$$

$$\text{s.t.} \quad \left.\prod_{k=1}^{N} h_k^{x_k}\right|_o = 1 \tag{16}$$

$$\left.\prod_{k=1}^{N} g_k^{x_k}\right|_j - \left.\prod_{k=1}^{N} h_k^{x_k}\right|_j \leqq 0\ (j=1,\ldots,n) \tag{17}$$

$$\boldsymbol{w}_i \geqq \boldsymbol{0} \quad (i=1,\ldots,m) \tag{18}$$

さらに，(9) 式の目的関数の分母を統一する式変形を考える．

$$\begin{aligned}
\left.\prod_{k=1}^{N} f_k^{x_k}\right|_o &= \left.\prod_{k=1}^{N} \frac{g_k^{x_k}}{h_k^{x_k}}\right|_o \\
&= \frac{\left.\prod_{k=1}^{N} g_k^{x_k}\right|_o}{\left.\prod_{k=1}^{N} h_k^{x_k}\right|_o} \cdot \frac{\left.\prod_{k=1}^{N}\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{N} h_\ell^{x_k}\right|_o}{\left.\prod_{k=1}^{N}\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{N} h_\ell^{x_k}\right|_o} \\
&= \frac{\left.\prod_{k=1}^{N}\left(g_k \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{N} h_\ell\right)^{x_k}\right|_o}{\left.\prod_{k=1}^{N} h_k\right|_o}
\end{aligned} \tag{19}$$

記号 $\left.\right|_j$ は DMU_j について計算することを意味する．

これにより，分子の複雑さは増すが，分母の指数を全て消すことができる．NLP-3 と同様に，(19) 式の分母を 1 に固定してそれを制約条件に移し，分子のみを目的関数にすると，以下の非線形計画問題 NLP-4 を得る．

NLP-4

$$\max \quad \prod_{k=1}^{N} \left(g_k \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{N} h_\ell \right)^{x_k} \Bigg|_o \tag{20}$$

$$\text{s.t.} \quad \prod_{k=1}^{N} h_k \Bigg|_o = 1 \tag{21}$$

$$\prod_{k=1}^{N} g_k^{x_k} \Bigg|_j - \prod_{k=1}^{N} h_k^{x_k} \Bigg|_j \leqq 0 \; (j = 1, \ldots, n) \tag{22}$$

$$\boldsymbol{w}_i \geqq \boldsymbol{0} \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{23}$$

4. 数値計算例

簡単な直列型ネットワークモデル [2] を例として，提案した非線形計画問題 NLP1,3,4 により相対効率値を求める．評価対象となるネットワーク $N(\mathbb{V}, \mathbb{L}; \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{W})$ を図 1 に，DMU 数 = 5 のデータを表 1 に示す．

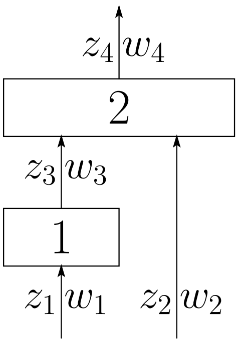


図 1. ネットワークモデル

表 1. 5DMU のリンクデータ

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5
z_1	3	2	6	4	1
z_2	4	5	2	1	2
z_3	7	3	6	3	3
z_4	6	7	4	8	4

このネットワークに仮想部門ノード 0 を追加したネットワーク $N(\mathbb{V}^+, \mathbb{L}; \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{W})$ のリンク総価値行列 $\boldsymbol{Q}$ は

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 \\ 0 & 0 & q_3 \\ q_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

となるので，行毎に正規化した行列 $\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{q_1}{q_1+q_2} & \dfrac{q_2}{q_1+q_2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

に対応するマルコフ連鎖の定常状態確率，若しくは，行列 $\boldsymbol{Q}^\mathsf{T}$ の右主固有ベクトルを求め，これを $\boldsymbol{x}$ とすれば，積型ネットワーク効率関数は

$$\begin{aligned} A_{\text{product}} &= f_1^{x_1} \cdot f_2^{x_2} \\ &= \left(\frac{q_3}{q_1} \right)^{x_1} \cdot \left(\frac{q_4}{q_2+q_3} \right)^{x_2} \end{aligned} \tag{26}$$

で与えられる (但し，$q_i = \boldsymbol{z}_i^\mathsf{T} \boldsymbol{w}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$). 従って，g_k 及び h_k は

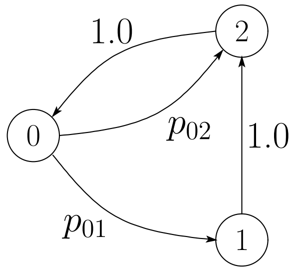
$$\begin{cases} g_1 = q_3 \\ g_2 = q_4 \end{cases}, \quad \begin{cases} h_1 = q_1 \\ h_2 = q_2 + q_3 \end{cases} \tag{27}$$

に相当する．

また，$N(\mathbb{V}^+, \mathbb{L}; \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{W})$ に対応する価値フローマルコフ連鎖 (図 2) の定常状態確率は，連立 1 次方程式を解くことにより

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{q_1}{2q_1 + q_2} \\ x_2 = \dfrac{q_1 + q_2}{2q_1 + q_2} \end{cases} \tag{28}$$

と解析的に与えられる．



$$p_{01} = \frac{\boldsymbol{z}_1^\mathsf{T} \boldsymbol{w}_1}{\boldsymbol{z}_1^\mathsf{T} \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{z}_2^\mathsf{T} \boldsymbol{w}_2}$$

$$p_{02} = \frac{\boldsymbol{z}_2^\mathsf{T} \boldsymbol{w}_2}{\boldsymbol{z}_1^\mathsf{T} \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{z}_2^\mathsf{T} \boldsymbol{w}_2}$$

図 2. マルコフ連鎖

なお，価値フロー固有ベクトルは逐次数値計算を行い求めた．

以上のように定式化された非線形計画問題 NLP1,3,4 を，Wolfram Mathematica によって解き，求めた相対効率値を実現評価 (相対効率値最大化時の $\boldsymbol{w}_i$ の値) と共に示す．

表 2. 原形定式化 NLP-1 の計算結果 (マルコフ連鎖)

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5
効率値	0.7957	1	0.5385	1	1
w_1	19.878	0.5038	1.2020	1	1.5355
w_2	1.5480	0.2762	0.8155	1	0.6896
w_3	52.363	1.3257	0.9487	1	0.8138
w_4	0.0074	1.4694	1.0123	1	1.2907

表 3. 原形定式化 NLP-1 の計算結果 (固有ベクトル)

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5
効率値	0.7496	1	0.5869	1	1
w_1	1.2054	1.4324	1.0938	1	1.5678
w_2	1.3274	0.4439	1.0702	1	1
w_3	1.0016	1.8308	1.0340	1	1
w_4	1.1202	0.8074	1.0899	1	1.3698

表 4. 変形定式化 NLP-3 の計算結果 (マルコフ連鎖)

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5
効率値	0.7761	0.9654	0.5568	1	1
w_1	0.1083	0.1935	0.0778	0.2515	0.5620
w_2	0.0263	0.0498	0.0157	0.1443	0.0581
w_3	0.3190	0.5109	0.3351	0.2845	0.4987
w_4	0.0582	0.1041	0.0418	0.1436	0.1790

表 5. 変形定式化 NLP-3 の計算結果 (固有ベクトル)

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5
効率値	0.7927	1	0.6334	1	1
w_1	0.3582	0.2701	0.1415	0.2646	0.3539
w_2	5.9E-13	0.1014	0.3372	0.2366	0.2907
w_3	0.0662	0.2860	0.0769	0.2323	0.3046
w_4	40.544	0.1557	0.2027	0.1939	0.2589

表 6. 変形定式化 NLP-4 の計算結果 (マルコフ連鎖)

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5
効率値	0.8035	1	0.5667	1	1
w_1	5.5E-5	0.4289	2.0E-5	0.2698	0.5371
w_2	1.3E-6	0.2332	4.2E-7	0.3456	0.2944
w_3	853.94	5.6E-8	1419.4	0.1937	0.4243
w_4	3.1E-5	116.09	1.1E-5	0.1851	0.3084

表 7. 変形定式化 NLP-4 の計算結果 (固有ベクトル)

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5
効率値	0.7801	1	0.6315	1	1
w_1	0.1843	0.3371	0.1463	0.2114	0.6701
w_2	0.3027	0.1031	0.3108	0.4033	0.3928
w_3	0.0879	0.3225	0.0863	0.2598	0.2350
w_4	0.1863	0.1694	0.1898	0.1585	0.3620

5. おわりに

ネットワーク DEA における相対効率値評価問題を 3 つ定式化した．本質的には微分可能・連続関数である**変形定式化**のどちらかを解くべきであり，**原形定式化**はその簡易版といえる．ブラックボックス DEA では，3.2 節と同様の変形を行うことで，線形計画問題に変換することができたが，積型効率関数を用いた本研究においては変形を施しても非線形のままであり，どの問題を解くべきか検討する必要がある．

数値実験では，NLP1,3,4 のいずれの場合を解いても，重み指標にマルコフ連鎖・固有ベクトルのどちらを用いた問題を解いた結果も，最終的に得られた相対効率値に大きな差はないと思われる．しかし，各問題間で収束の安定性にはバラツキがあり，特に非線形問題の最適解への収束は初期値に左右されやすく，本数値実験でも局所解に陥ることが度々あった．場合によっては，複数の問題を解くことや，離散評点法の併用アプローチ (事前評価による初期値決定，簡易評価による連続評点解の裏付け) なども考えられる．

また，目的関数の関数形がポジノミアルで与えられているため，幾何計画法での解法の考察なども今後の課題とする．

余談となるが，本研究では Mathematica の FindMinimum 関数を使用して非線形計画問題を解いたが，NLP-3 の固有ベクトルでの DMU1 で，重みベクトル $\boldsymbol{w} = (0.1820, 0.3097, 0.1404, 0.1705)^\mathsf{T}$ で効率値が 1 になる数値解析結果が得られたが，制約条件 (16) が近似的にも満たされていない．これが Mathematica の仕様上のためか，それとも等式制約が多少複雑な指数を含む関数で与えられているため，条件を満たすのが困難だったのか，いずれにしろ注意したい．

参考文献

[1] 篠原正明・茂木渉：離散評点ネットワーク DEA の枠組，平成 20 年度日本大学生産工学部 第 41 回学術講演会 数理情報部会講演概要 pp.65-66(2008.12)

[2] 篠原正明・茂木渉・大澤慶吉：離散評点ネットワーク DEA の表計算 -積型ネットワーク効率関数-，日本オペレーションズ・リサーチ学会 2009 年秋季研究発表会アブストラクト集，1-G-5，pp.144-145(2009.9)