

DEA における入力指向と出力指向の比較(その 2)

日大生産工(院) 金成 賢作
日大生産工 篠原 正明

1. はじめに

DEA(Data Envelopment Analysis)には入力指向(Input Oriented)と出力指向(Output Oriented)という2種類の考え方が存在する。入力値の改善に着目したものを入力指向、出力値の改善に着目したものを出力指向と呼ぶ。本研究では CCR Model (Charnes, Cooper and Rhodes Model)での入力指向と出力指向の比較、BCC Model (Banker, Charnes and Cooper Model)での入力指向と出力指向の比較を行う。これにより、入力指向と出力指向の間にある関係性を考える。

本原稿では CCR Model(Input Oriented)を CCR-I、CCR Model (Output Oriented)を CCR-O と表記する。同様に、BCC Model (Input Oriented)を BCC-I、BCC Model (Output Oriented)を BCC-O と表記する。

本研究は研究その 1 と研究その 2 に分かれている。その 1 では概要説明をした後、1 入力 1 出力データの例を説明する。研究その 2 では 2 入力 2 出力データの例を説明した後、研究全体についての考察を行う。

2. 入力指向と出力指向の関係

モデル式を用いて CCR Model における入力指向と出力指向の関係について考えると、図 1 に示す関係式が得られる。式(2.1)より、入力ウェイト(入力指向)と効率値の除算結果は入力ウェイト(出力指向)と等しいことが分かる。式(2.2)より、出力ウェイト(入力指向)と効率値の除算結果は出力ウェイト(出力指向)と等しいことが分かる。式(2.4)より、CCR-I 効率値は CCR-O 効率値の逆数と等しいことが分かる。

Input Oriented and Output Oriented		
Input Weight:	$p^+ = v^+ / \theta^*$	(2.1)
Output Weight:	$q^+ = u^+ / \theta^*$	(2.2)
Lambda:	$\lambda^* = \mu^* / \eta^*$	(2.3)
Input Score:	$\theta^* = 1 / \eta^*$	(2.4)
Output Score:	$p^+ x_o = v^+ x_o / \theta^*$ $= \eta^* \geq 1$	(2.5)

Figure1: Results

3. 入力指向 Slack と出力指向 Slack

CCR-I Slack と CCR-O Slack の関係性を考える。CCR-I Slack(+)と CCR-I 効率値の除算結果は CCR-O Slack(+)と同等で、CCR-I Slack(-)と CCR-I 効率値の除算結果は CCR-O Slack(-)と等しくなる。

CCR-I Slack		
Excess Slack:	$s^- = x_o \theta - X \lambda$	
Shortage Slack:	$s^+ = Y \lambda - y_o$	(3.1)

CCR-O Slack		
Excess Slack:	$t^- = x_o - X \mu$	
Shortage Slack:	$t^+ = Y \mu - \eta y_o$	(3.2)



Input Oriented and Output Oriented		
Excess Slack:	$t^- = s^- / \theta$	(3.3)
Shortage Slack:	$t^+ = s^+ / \theta$	(3.4)

Figure2: Slack

4. 2入力2出力データによる例

2入力2出力データを任意に作成し、DEAによる効率性評価を行った。本研究ではDEA-Solverを用いて効率性評価を行った。表1に入力データと出力データ、表2に効率値を掲載する。

第2節で式(2.4)を取り上げ、CCR-I効率値がCCR-O効率値の逆数と等しいことを理論的に証明した。表2を観察すると式(2.4)と同様に、CCR-I効率値がCCR-O効率値の逆数と等しいことが分かる。よって、式(2.4)の関係が実験的にも証明されたと言える。また、表2を観察すると、BCC-I効率値とBCC-O効率値の逆数は等しくないことも確認できる。

次に、CCR ModelのSlackについて注目してみる。第3節で式(3.3),(3.4)を取り上げ、CCR-I Slack(+)とCCR-I効率値の除算結果はCCR-O Slack(+)と同等で、CCR-I Slack(-)とCCR-I効率値の除算結果はCCR-O Slack(-)と等しくなることを理論的に証明した。次の表3,4を観察すると、CCR-I SlackとCCR-I効率値の除算結果はCCR-O Slackに等しいことが分かる。

よって、式(3.3),(3.4)の関係が実験的にも証明されたと言える。

Table1: Data

M	Data (2 Input / 2 Output)			
	Input 1	Input 2	Output 1	Output 2
A	4	3	1	3
B	4	2	3	6
C	5	1	6	4
D	6	1	2	2
E	7	4	8	1
F	8	13	4	11
G	9	11	1	5
H	9	3	6	7
I	10	7	8	8
J	11	10	3	9
K	12	6	10	10
L	13	7	2	2
M	13	8	5	11
N	14	6	3	5
O	14	5	7	3
P	15	8	10	6
Q	16	7	1	4
R	17	14	5	7
S	17	13	8	4
Y	21	18	2	5
Z	23	20	1	7

Table2: Score

M	Score (2 Input / 2 Output)			
	BCC-I	BCC-O	CCR-I	CCR-O
A	1.000000000	0.500000000	0.500000000	0.500000000
B	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000
C	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000
D	1.000000000	0.500000000	0.500000000	0.500000000
E	1.000000000	1.000000000	0.9523809524	0.9523809524
F	1.000000000	1.000000000	0.9166666667	0.9166666667
G	0.4444444444	0.4687500000	0.3703703704	0.3703703704
H	1.000000000	1.000000000	0.7000000000	0.7000000000
I	0.9150000000	0.9306122449	0.7666666667	0.7666666667
J	0.7142857143	0.8181818182	0.5454545455	0.5454545455
K	1.000000000	1.000000000	0.7986111111	0.7986111111
L	0.3076923077	0.2000000000	0.1474358974	0.1474358974
Y	0.1904761905	0.4545454545	0.1587301587	0.1587301587
Z	0.2093023256	0.6363636364	0.2028985507	0.2028985507

Table3: Excess Slack

M	CCR-I Excess Slack / Score = CCR-O Excess Slack			
	CR-I Slack1 / Scor	CCR-O Slack1	CR-I Slack2 / Scor	CCR-O Slack2
A	0	0	1	1
B	0	0	0	0
C	0	0	0	0
D	1	1	0	0
E	0	0	2.60000000	2.60000000
F	0	0	9.00000000	9.00000000
G	0	0	6.50000000	6.50000000
H	0	0	0	0
I	0	0	3.9565217	3.9565217
J	0	0	4.50000000	4.50000000
K	0	0	2.3478261	2.3478261
L	0	0	3.0434783	3.0434783
M	0	0	1.50000000	1.50000000
Y	0	0	7.50000000	7.50000000
Z	0	0	8.50000000	8.50000000

Table4: Shortage Slack

M	CCR-I Shortage Slack / Score = CCR-O Shortage Slack			
	CR-I Slack1 / Scor	CCR-O Slack1	CR-I Slack2 / Scor	CCR-O Slack2
A	1	1	0	0
B	0	0	0	0
C	0	0	0	0
D	2.00000000	2.00000000	0	0
E	0	0	4.55000000	4.55000000
F	1.636363636	1.636363636	0	0
G	4.05000000	4.05000000	0	0
H	0.4285714	0.4285714	0	0
I	0	0	0	0
J	2.75000000	2.75000000	0	0
K	0	0	0	0
L	0	0	0	0
M	0.886363636	0.886363636	0	0
Y	3.15000000	3.15000000	0	0
Z	12.321429	12.321429	0	0

5. 考察 1

研究その1で取り上げた1入力1出力の例について、再度検証する。 x 軸を入力値、 y 軸を出力値として、グラフ1を作成した。

実際の測定によりCCR Model 並びにBCC Modelの効率値を算出し、DEA-Solverを用いた時と同様の結果が得られるかを、確認してみた。今回はDMU_Fに対して測定を行った。 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ を実際に測定すると図3のような結果が得られた。これらの値を基にして、各モデルにおける効率値を算出した。

CCR-I 効率値 0.4166667 は、CCR-O 効率値の逆数 $1/2.4 = 0.4166667$ と等しいことが判明した。また、BCC-I 効率値 0.5416667 は、BCC-O 効率値の逆数 $1/2.1 = 0.4761905$ と等しくならぬことも判明した。これらの結果は、DEA-Solver を用いた時と同様だと言える。

DMU_Fにおける各効率値の大小関係を考えてみた。CCR-I効率値 x_3/x_1 はBCC-I効率値 x_2/x_1 に比べて、小さくなる。CCR-O効率値 y_3/y_1 はBCC-O効率値 y_2/y_1 に比べて大きくなる。つまり、入力指向の場合はBCC Modelの方が高く評価されるのに対し、出力指向ではCCR Modelの方が高く評価されるのだ。

図3を見ると入力指向ではBCC-I効率値 0.5416667 がCCR-I効率値 0.4166667 よりも大きな値を記録した。それに対し、出力指向ではCCR-O効率値 2.4 がBCC-O効率値 2.1 よりも大きな値を記録した。なお、CCR-O効率値の逆数 0.4166667 は、BCC-O効率値の逆数 0.4761905 よりも小さくなる。

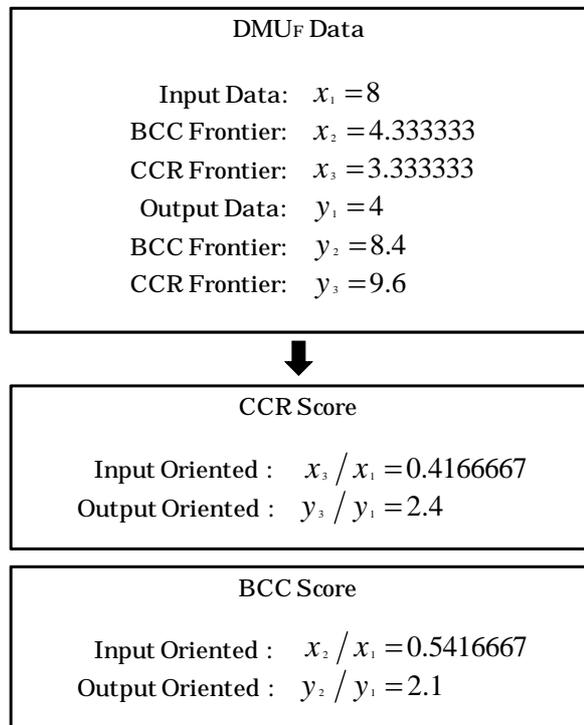
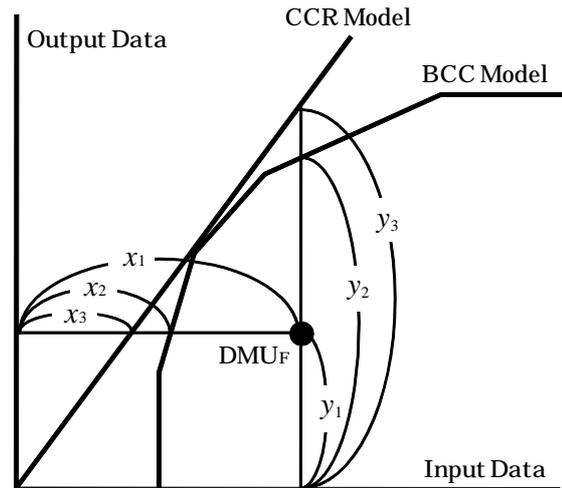
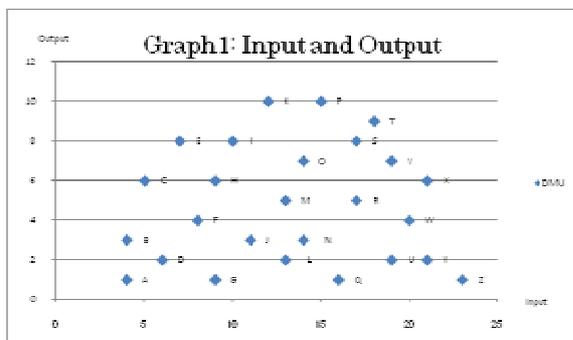
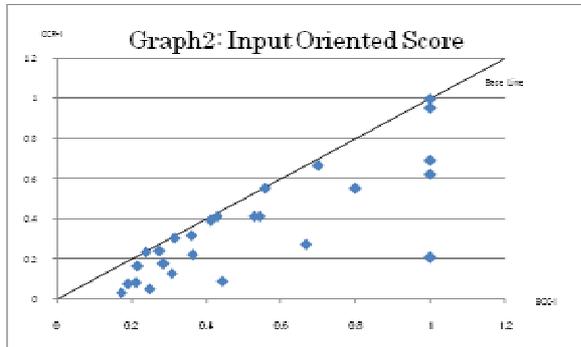


Figure3: Score

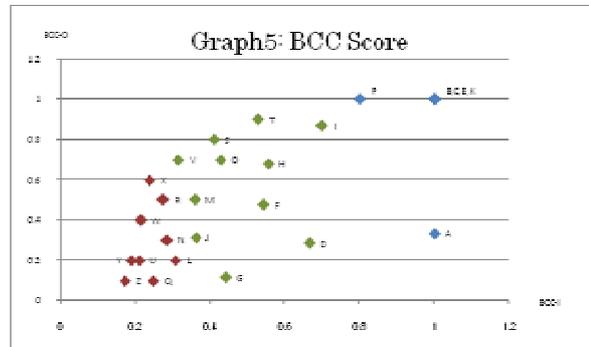
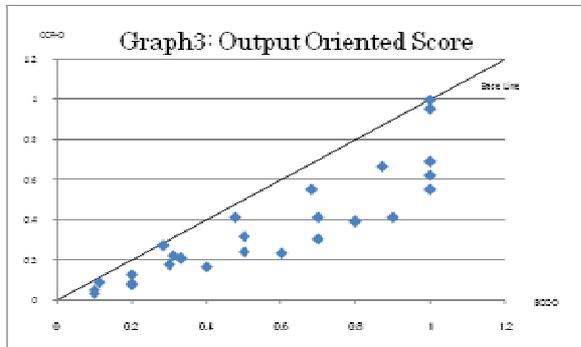
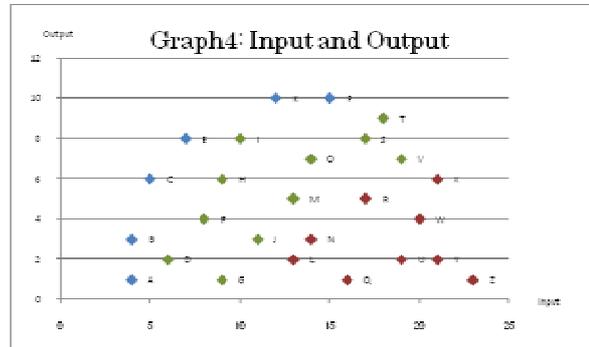


x 軸をBCC-I効率値、 y 軸をCCR-I効率値として、グラフ2を作成した。同様に、 x 軸をBCC-O効率値の逆数、 y 軸をCCR-O効率値の逆数として、グラフ3を作成した。まず、グラフ2について考えてみる。黒線 Base Line は直線 $y=x$ を表している。既に説明したように、CCR-I効率値はBCC-I効率値に比べて小さくなる。よって、グラフ2にプロットされている全ての点がBase Line以下の領域に存在する。

同様に、グラフ 3 についても、プロットされている全ての点が Base Line 以下の領域に存在する。



言える。Group Greenに関しては効率値がBlueとRedのほぼ中間に位置していることが分かる。



6. 考察 2

x 軸を入力値、 y 軸を出力値として、グラフ 4 を作成した。 x 軸を BCC-I 効率値、 y 軸を BCC-O 効率値としてグラフ 5 を作成した。第 6 節では各 DMU を任意の Group に分けて考える。Group は Blue, Green, Red の合計 3 Group を用意した。

グラフ 4 を見ると Group Blue に属する全 DMU が効率的フロンティア上に位置することが確認できる。よって、グラフ 5 では Group Blue の大半の DMU が、 $(BCC-I, BCC-O) = (1, 1)$ に位置している。ただし、DMU_A, DMU_P に限り BCC-I 効率値、BCC-O 効率値のどちらか一方のみが効率値 1 となっている。

グラフ 4 を見ると Group Red は効率的フロンティアから離れた位置にあることが確認できる。そのため、グラフ 5 では Group Red の全 DMU が BCC-I 効率値、BCC-O 効率値ともに低い値となっている。特に、DMU_Z に関しては、3 Group の中で最も非効率的だと

7. おわりに

入力指向と出力指向の CCR Model と BCC Model を理論ならびに数値実験により考察した。CCR Model では、入力指向と出力指向の間には効率値が逆数、Slack の間には密接な関係が存在する等、対応関係が存在するという意味で、両者は等価である。一方、BCC Model では、効率値の間に逆数関係も存在せず、入力指向と出力指向は等価でなく、別のモデルと考えられる。

参考文献

- [1] 刀根薫, 包絡分析法 DEA による経営効率性の測定と改善, 日科技連 (1993)
- [2] 上田徹, オペレーションズ・マネージメント 経営の科学とその応用, 牧野書店 (2006), pp.186-218