7-51

黄金分割法による自由変数連続化離散評点BCCモデル

日大生産工(院)　○藤沢　雅之　日大生産工(院)　茂木　渉
日大生産工　大澤　慶吉　日大生産工　篠原　正明

1. はじめに

離散評点DEA-BCCモデルによる効率値計算においては，存在性項目として追加された出力項目y_0に対する評価値u_0が自由変数であり，正値・零値・負値のあらゆる値をとることができる．従って，例えば$u_0 = \{0, \pm1\}, \{0, \pm1, \pm2\}, \{0, \pm1, \pm2, \pm3\}$などと，正負値を許容した離散評点に，それ以外の評価値$u_i\ (i = 1, \ldots, s), v_i\ (i = 1, \ldots, m)$については，例えば$\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}$,あるいは$\{1, 2, 3\}$などと非負値のみ許容した離散評点に限定し，それらの離散評点組合せを列挙して評価組合せパターン毎に絶対効率値・相対効率値を計算し，DMU毎に最大相対効率値を計算する．

離散評点BCCモデルに基づく計算効率値と連続評点BCCモデルに基づく計算効率値を比較した結果，CCRモデルの2つの計算比較結果と比べて誤差が大きいことが判明した[2]．この原因として，

(i) BCCモデルにおいてはCCRモデルに自由変数u_0が付加された
(ii) その自由変数u_0の変動域が広い
(iii) 自由変数u_0による包絡の幾何学的形状[3]

などの理由によるものと考えられる．そこで，自由変数u_0のみを連続変数として扱い，効率値計算に黄金分割法を用い，離散評点BCCモデルに取って代わり得るあるいは併用するアプローチを提案するとともに，離散評点BCCモデルにおける自由変数u_0の重要性や離散評点法と連続評点法の近似具合について考察する．

2. u_0変化による相対効率値最大化問題の定式化

$\boldsymbol{u}$と$\boldsymbol{v}$を固定した下で，BCCモデルによる$\mathrm{DMU}_j\ (j = 1, \ldots, n)$の絶対効率値$A_j$は次式で与えられる．

$$A_j = \frac{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_j + u_0 y_{0j}}{\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_j} \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

但し，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$は固定された評価列ベクトル，$y_{0j} = 1\ (j = 1, \ldots, n)$，$u_0$は可変の自由変数である．これより，注目する$\mathrm{DMU}_o$の相対効率値$R_o$は次式で与えられる．

$$R_o = \frac{A_o}{\max_j \{A_j\}} \tag{2}$$

(1)式を分解して$A_j = a_j + b_j u_0$とすると，$a_j > 0, b_j > 0$は次式で定義される．

$$a_j := \frac{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_j} \tag{3}$$

$$b_j := \frac{y_{0j}}{\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_j} \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{u} \geq (>) \boldsymbol{0}, \boldsymbol{v} \geq (>) \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}_j \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_j \geq \boldsymbol{0}$だが，$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_j > 0$, $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_j > 0$が成立すると仮定している．従って，$u_0$変化時$R_o$最大化問題は次のように定式化される．

$$\max_{u_0} \quad \frac{a_j + b_j u_0}{\max_j \{a_j + b_j u_0\}} \quad (u_0 \in \mathrm{R}) \tag{5}$$

3. 黄金分割法による解法

黄金分割法は，1次元非線形最適化問題の代表的な解法であり，単峰性を仮定した目的関数における最適値の存在区間を黄金比で分割し，その区間を狭めていく手法である．相対効率値最大化問題の目的関数を$f(u_0)$として

$$f(u_0) := \frac{a_j + b_j u_0}{\max_j \{a_j + b_j u_0\}} \tag{6}$$

Discrete-scoring BCC Model with Free Variable u_0 via Golden Section Search

Masayuki FUJISAWA, Wataru MOGI, Keikichi OSAWA and Masaaki SHINOHARA

と定義し，これを最大化するアルゴリズムを以下に示す．

[ステップ1] 探索区間$[p^0, q^0]$を用意する．

[ステップ2] 区間$[p^0, q^0]$をφで内分する点をそれぞれα^0, β^0とする．

$$\alpha^0 \leftarrow p^0 + \varphi(q^0 - p^0) \tag{7}$$

$$\beta^0 \leftarrow q^0 - \varphi(q^0 - p^0) \tag{8}$$

[ステップ3] $i+1$回目の探索区間を次のように狭める．

if $f(\alpha^i) \le f(\beta^i)$ then

$$p^{i+1} \leftarrow \alpha^i \tag{9}$$

$$q^{i+1} \leftarrow q^i \tag{10}$$

$$\alpha^{i+1} \leftarrow \beta^i \tag{11}$$

$$\beta^{i+1} \leftarrow q^i - \varphi(q^i - \alpha^i) \tag{12}$$

else

$$p^{i+1} \leftarrow p^i \tag{13}$$

$$q^{i+1} \leftarrow \beta^i \tag{14}$$

$$\alpha^{i+1} \leftarrow p^i + \varphi(\beta^i - p^i) \tag{15}$$

$$\beta^{i+1} \leftarrow \alpha^i \tag{16}$$

[ステップ4] 収束判定．

$|p^i - q^i| \le \varepsilon$ or $i = n$で終了する．収束条件を満たさないならば**[ステップ3]**へ．

但し，φは黄金比であり，

$$\varphi = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \fallingdotseq 0.382 \tag{17}$$

で与えられる．

4. 数値計算例

簡単な1入力1出力の例題として，8つの1入力1出力DMUデータ([4]の表2.1)に，連続評点BCCモデル・離散評点BCCモデル・自由変数連続化離散評点BCCモデルの3つを適用し，効率値の計算と比較を行う．1入力1出力DMUデータに，存在意義による出力項目とする存在性項目($y_{0j}=1$)を加えたデータを表1に示す．離散評点DEAではすべてのスケール度合を一定にしなくてはならないため，各項目に対してデータ総和を1に正規化し，これを表2に示す．

表1. 1入力2出力化DMUデータ

DMU	入力1 (x_1)	出力1 (y_1)	出力0 (y_0)
A	2	1	1
B	3	3	1
C	3	2	1
D	4	3	1
E	5	4	1
F	5	2	1
G	6	3	1
H	8	5	1

表2. 正規化DMUデータ

DMU	入力1 (x_1)	出力1 (y_1)	出力0 (y_0)
A	0.0555556	0.0434783	0.125
B	0.0833333	0.1304348	0.125
C	0.0833333	0.0869565	0.125
D	0.1111111	0.1304348	0.125
E	0.1388889	0.1739130	0.125
F	0.1388889	0.0869565	0.125
G	0.1666667	0.1304348	0.125
H	0.2222222	0.2173913	0.125

離散評点BCCモデルならびに自由変数連続化BCCモデルでの評価値u, vは$\{1, 2, 3\}$の3段階とし，さらに離散評点BCCモデルでの存在性項目に対する評価値u_0は$\{-1, 0, 1\}$の3段階として計算した相対効率値の結果を表3に示す．

表3. 数値計算結果

DMU	連続評点BCC	離散評点BCC	自由変数連続化BCC
A	1	0.9894	1
B	1	1	1
C	0.8333	0.8298	0.8333
D	0.75	0.75	0.75
E	1	0.984	1
F	0.5	0.4979	0.5
G	0.5	0.5	0.5
H	1	1	1

表3より，初期区間を適切に与えることで，提案モデルの結果は離散評点BCCモデルよりも効率値が高く，連続評点BCCモデルと同じ値を得ることができた．

5. 相対効率値グラフ

相対効率値最大化問題は，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$を固定することで$u_0$に関する1次元最適化問題となるので，これをグラフ表示してその変化を観察する．図1～図8では，$u = 1$, $v = 1$と固定し，横軸にu_0 ($[p^0, q^0] = [-100, 100]$)，縦軸にDMU$_j$の相対効率値$f(u_0)$をプロットしている．

但し，DEAは相対的評価法なので，最大効率値は1以下に押さえられるため，グラフでは1以上や無限大になっているものもあるが，表3の結果では$f(u_0) > 1$は無視している(その他でも同様)．

DMU Aの$u = 1, v = 1$での最大効率値は1でu_0はユニークに決まらず，約1.0435以上で達成される．

DMU Bで最大効率値が1となるのは，u_0が約–0.52から約1.04のときで，ユニークには決まらない．

DMU Cでは最大効率値が1とならず，0.8333…であり，この場合のu_0は約1.0435でユニークに決まる．

DMU Dにおいて効率値が最大となるのは，u_0が約–0.52から約1.04のときで，ユニークには決まらず，その効率値は0.75となる．

DMU Eにおいて，最大効率値が1となるのは，u_0が約–0.81から約–0.53のときで，ユニークには決まらない．

DMU Fでは最大効率値が1とならず，0.5であり，この場合のu_0はDMU Cと同じく約1.0435でユニークに決まる．

DMU Gで最大効率値が1となるのは，DMU Bと同じくu_0が約–0.52から約1.04のときである．

DMU Hのみ他とは異なり，最大効率値が1となるのはu_0が約–0.82以下のときである．DMU Hのみ，効率値が1を超えることがない．

6. おわりに

離散評点DEA-BCCモデルの代替法あるいは併用するアプローチとして，自由変数のみ連続化させた離散評点BCCモデルの相対効率値を黄金分割法により計算し，その結果，離散評点法よりも効率値を大きくし，連続評点法に近い値を得ることができた．

効率値が1を超えてしまうケースの原因は，u_0が負値をも取り得る自由変数である．

本例($u = 1, v = 1$と固定)では，(5)式の分母でu_0減少時，$j = \mathrm{H}$の項が最後に正→0→負と変化し，$a_{\mathrm{H}} = 0.217 / 0.222 = 0.977$, $b_{\mathrm{H}} = 0.125 / 0.222 = 0.563$なので，$u_0 = -a_{\mathrm{H}} / b_{\mathrm{H}} = -1.735$未満において，分母の全項がすべて負になる不連続現象が発生する．絶対効率値$A_j > 0$の条件を付加すれば，以上の問題は発生しないが，絶対効率値$A_j < 0$の状況は性能低下現象[3]とも密接に関連している．なお，連続評点BCCでは，上記問題点をLPの最適化の過程で自然に解決している．

参考文献

[1] 篠原正明・大澤慶吉・鈴木洋臣：BCCモデルのCCRモデルに基づく解釈，日本大学生産工学部第35回学術講演会 数理情報部会講演概要，pp.121-122(2002.12).

[2] 金子隆史・大久保智弘・大澤慶吉・篠原正明：離散評点BCCモデルの試み，日本大学生産工学部第39回学術講演会 数理情報部会 講演概要，pp41-44(2006.12).

[3] 大久保智弘・大澤慶吉・篠原正明：性能低下傾向にある生産活動群の効率性評価についての考察，日本大学生産工学部 第40回学術講演会 数理情報部会 講演概要，pp91-94 (2007.12).

[4] 刀根薫：経営効率性の測定と改善—包絡分析法DEAによる，日科技連(1993).

[5] 吉村彩・茂木渉・篠原正明：自由変数連続化による離散評点BCCモデル計算の高速化，日本大学生産工学部 第41回学術講演会 数理情報部会講演概要，pp.61-64(2008.12).

[6] 吉村彩：DEA凸包モデルに関する研究，平成20年度 日本大学大学院 生産工学研究科 数理情報工学専攻 博士前期課程論文(2009.3).

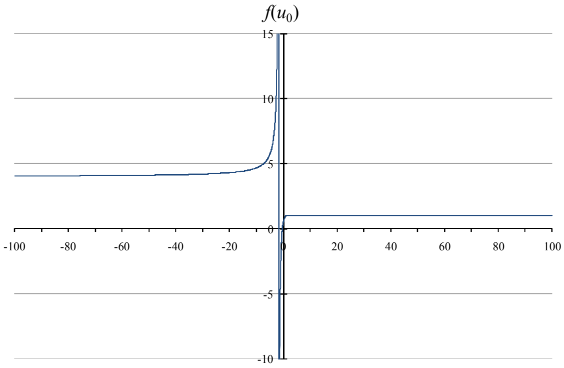

図1. DMU Aの$f(u_0)$のグラフ

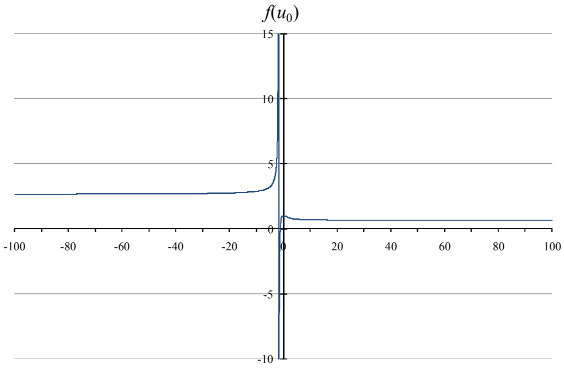

図2. DMU Bの$f(u_0)$のグラフ

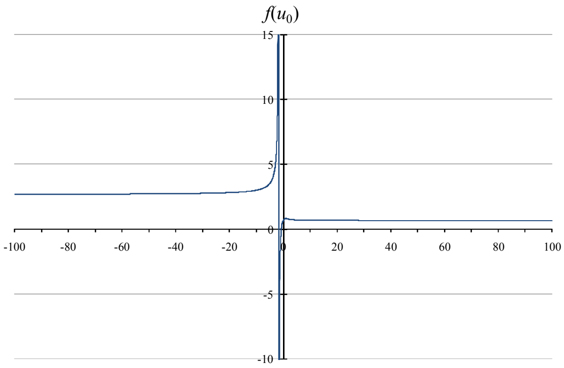

図3. DMU Cの$f(u_0)$のグラフ

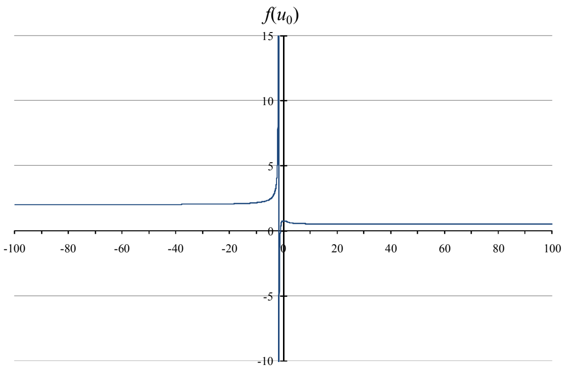

図4. DMU Dの$f(u_0)$のグラフ

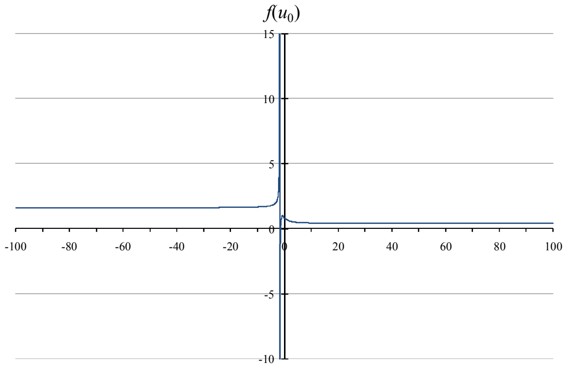

図5. DMU Eの$f(u_0)$のグラフ

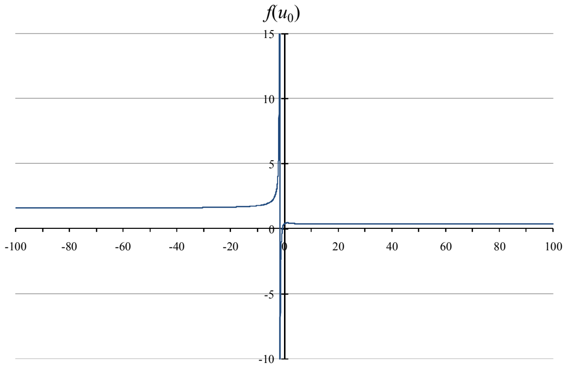

図6. DMU Fの$f(u_0)$のグラフ

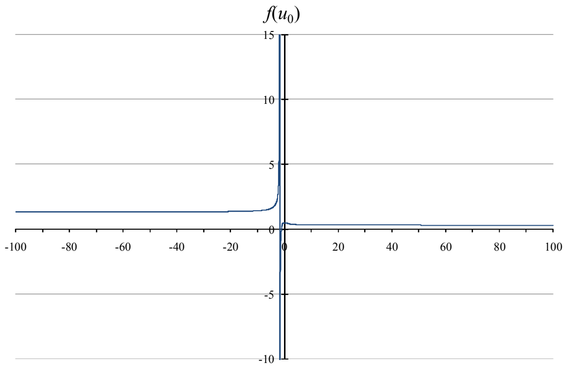

図7. DMU Gの$f(u_0)$のグラフ

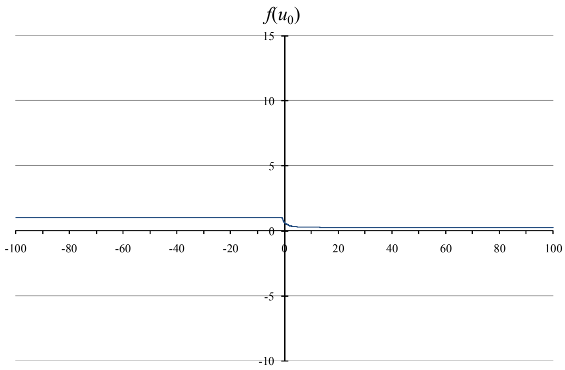

図8. DMU Hの$f(u_0)$のグラフ