

複式簿記理論の位相幾何学的考察(その 5)

－ 木構造にもとづく会計システム －

日大生産工 ○篠原正明
情報システム研究所 篠原健

1. はじめに

文献[1](その 1)において、取引ネットワークにカットセット解析を導入することにより、カットセットにより切断されるノード集合(グループ)毎の収支残高変動分ベクトルを計算した。カットセット群として、取引ネットワーク内の木によって定まる基本カットセット系に注目し、選択する木によって、どのような会計処理システムが実現できるかを考察する。

2. 基本閉路系と基本カットセット系 (用語等は[2]を参照)

グラフ $G=(V,E)$ の 1 つの木を T とする(なお、取引行列も T で表現するが、本論文(その 5)では木を表現する)。木 T とは、閉路を含まない極大な枝集合である。従って、補木 $\bar{T}(=E-T)$ の枝 ℓ とそれ以外は木の枝から構成される 1 つの閉路が存在するが、これを枝 ℓ の T に関する基本閉路と呼ぶ。補木 $\bar{T}$ のすべての枝についての基本閉路の組を、1 つの木 T (あるいは補木 $\bar{T}$) に対する基本閉路系と呼ぶ。

同様に、補木 $\bar{T}$ とはカットセットを含まない極大な枝集合である。従って、木の枝 e とそれ以外は補木枝から構成される 1 つのカットセットが存在するが、これを枝 e の T に関する基本カットセットと呼ぶ。木 T のすべての枝についての基本カットセットの組を 1 つの木 T (あるいは補木 $\bar{T}$) に対する基本カットセット系と呼ぶ。

3. カットセット行列と基本カットセット

行列(用語等は[2]を参照)

複式簿記の会計システムで扱う取引ネットワークは、グラフ理論の立場からは、便宜上、向き付けされた枝を持つ無向グラフである。向き付けグラフ $G=(V,E)$ のカットセット行列 $C=\{c_{ik}\}$ とは、行 i が初等的単純なカットセット c_i に、列 k が枝 $k \in E$ に対応し、 (i, k) 要素 c_{ik} は以下で定義される。

$c_{ik} = +1$: カットセット c_i が枝 k を正の向き(同方向)に含む時
 $c_{ik} = -1$: カットセット c_i が枝 k を負の向き(逆方向)に含む時
 $c_{ik} = 0$: その他

文献[1](その 1)の例 3 でのカットセット行列 C ([1]の(9)式)と取引ネットワーク([1]の図 2)を以下に式(1)と図 1 として再掲する。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

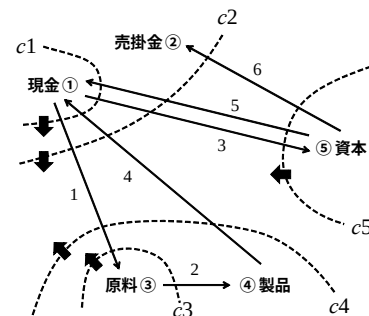


図 1：取引ネットワークとカットセット群

図1には、カットセット群 $\{c_1, c_2, \dots, c_5\}$ と、その向きを太矢印で示した。 c_1 は枝1と同じ向き、 c_2 も枝1と同方向、 c_3, c_4 は枝1と逆方向、 c_5 は枝5と同方向である。式(1)と図1に示したカットセット群はカットセット $c_i (i=1, \dots, 5)$ の集合ではあるが、ある木Tに対応した基本カットセット系ではない。

次に、図1の取引枝の中から木を構成する。例えば、図2に示す太線表示の枝集合 $\{1, 3, 4, 6\}$ を木Tしよう。すると、図に示す4つのカットセット c_1, c_2, c_3, c_4 が基本カットセット系となる。ここで、 $c_1=\{1, 2\}$ 、 $c_2=\{3, 5\}$ 、 $c_3=\{2, 4\}$ 、 $c_4=\{6\}$ であり、太数字が木の枝を表す。又、太線矢印で木の枝と同方向に設定した各カットセットの向きも示した。

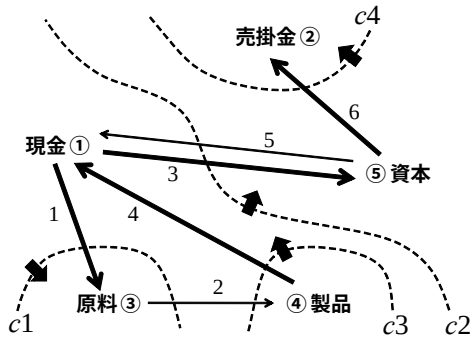


図2：取引ネットワークと木Tと基本カットセット系

Tに関する基本カットセット系の行列表示を基本カットセット行列 C_f で表示すると、行と列を適当に並び換えると、 C_f は以下の形式で表現できる。

$$C_f = \begin{matrix} \bar{T} & T \\ [C_\lambda : I_\rho] \end{matrix} \quad (2)$$

但し、 I_ρ は ρ 次の単位行列で、 ρ はグラフの階数で木の枝数である。 C_λ は補木 $\bar{T}$ の枝に対応する部分で C_f の主要部と呼ばれる。図2に示した木Tに関する基本カットセット行列 C_f は(3)で与えられる。

$$C_f = \begin{matrix} & 2 & 5 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3)$$

ここで枝5は1つの取引5に対応しており、金銭の移動区間という点では、取引3の(①,⑤)と同じであるが、個別の取引という意味で、別の枝とした。すなわち、一般に取引ネットワークでは、節点 (i, j) 区間に同方向、逆方向の意味で多重枝を許容する。さらに、ある時点で枝が存在しなくても、その後、その区間に取引が発生しうるので、補木枝として、仮想的な枝を想定できる。枝取引額列ベクトル t は、枝の順番を C_f と同じに並び換えて、(4)で与えられる。

$$\begin{aligned} t &= (t_2, t_5 : t_1, t_3, t_4, t_6)^T \\ &= (8, 7 : 10, 11, 12, 5)^T \end{aligned} \quad (4)$$

従って、この場合のカットセット別変動額 f_c は次式で計算する。

$$\begin{aligned} f_c &= C_f t \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

枝取引額列ベクトル t を(6)式で分割表現し、それを(5)に代入すれば、基本カットセット系の f_c は(7)式で表現できる。

$$\begin{aligned} t &= \begin{pmatrix} t_\lambda \\ t_\rho \end{pmatrix} \\ f_c &= (C_\lambda : I_\rho) \begin{pmatrix} t_\lambda \\ t_\rho \end{pmatrix} = C_\lambda t_\lambda + t_\rho \\ &= \begin{pmatrix} -t_2 \\ -t_5 \\ -t_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_6 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

木Tとして選んだ枝に対応する取引額 t_ρ はそのまま、補木枝に対応する取引額 t_λ を $C_\lambda t_\lambda$ により、 t_ρ に加算すれば f_c が求まる。すなわち、取引が頻発するような区間を木枝として選べば、 f_c の計算が計算上も分析上も簡略化できる。

4. 様々な木とそれに対応した基本カットセット系

図1の取引ネットワークを例にとり、図2に示した

木以外の2つの木として、星状木(*star-like tree*)と鎖状木(*chain-like tree*)をとりあげ、どのような基本カットセット系が構成されるかを考察する。もっと接点数が多い取引ネットワークでは、多段星状木、各種の複合木、等の様々なトポロジが考えられる。

4.1 星状木の基本カットセット系

図3に現金①を根とする星状木を示した(有向グラフの根ではない)。但し、売掛金②との間に②→①の売掛金の現金回収取引 $t_7 = t_{21} (= 0)$ を設定した。

木枝は、1, 4, 5, 7で、枝1以外は現金①への方向を、枝1は現金①から外向きである。木枝1, 4, 5, 7に各々対応するカットセットを c_1, c_2, c_3, c_4 とする。各カットセットの向きは各木枝の向きと同方向なので、カットセット c_1 のみが現金勘定ノード①より外向きである。

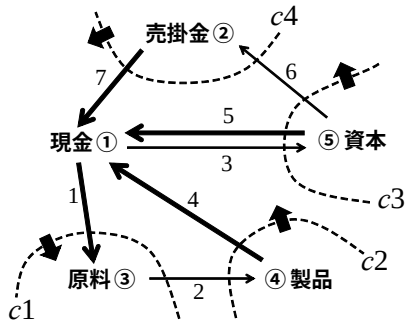


図3：星状木の基本カットセット系の例

(8)に基本カットセット行列 C_f 、(9)に枝取引額列ベクトル $\mathbf{t}$ 、(10)にカットセット別変動額列ベクトル $\mathbf{f}_c$ を示す。

$$C_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 6 & 1 & 4 & 5 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{t} = (t_2, t_3, t_6 : t_1, t_4, t_5, t_7)^T = (8, 11, 5 : 10, 12, 7, 0)^T \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_c &= C_f \mathbf{t} \\ &= C_\lambda \mathbf{t}_\lambda + \mathbf{t}_\rho \\ &= \begin{pmatrix} -t_2 \\ -t_2 \\ -t_3 + t_6 \\ -t_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad (10) \end{aligned}$$

本例での星状木の基本カットセット系では、現金勘定ノード①を根としているので、木枝として現金取引と直接関連した取引を選ぶことができる。但し、取引 t_3 は補木枝であるが、取引 t_5 を新たに $t_5 - t_3$ とすれば、区間(①,⑤)の取引を1つに統合できる。又、伝統的な節点-枝接続行列 S にもとづく計算は、星状木の基本カットセット系に冗長な星節点を付加した場合に相当するが、以下に示すように詳細を異にする。

星節点(節点①)に対応するカットセットを c_5 とし、 $c_5 = -c_1 - c_2 - c_3 - c_4$ と人為的に生成した時のカットセット行列 C_{f+} を(11)に示す。

$$C_{f+} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 6 & 1 & 4 & 5 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & : & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (11)$$

文献[1](その1)の(4)式の節点-枝接続行列 S と比較すると、 C_{f+} の $c_1 = (-1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ は原料③に内向きカットセットであり、 S における第3行ベクトル $s_3 = (-1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ とは、 $c_1 = -s_3$ の関係にある。但し、 s_3 に第7列要素「0」を付与し、 c_1 と s_3 は各要素に対応する節点異なる点に注意すること。

同様に、 C_{f+} の $c_2 = (-1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$ は、 $c_2 = s_4$ 、 $c_3 = s_5$ 、 $c_4 = s_2 (= (0, 0, 0, 0, 0, -1, 1))$ 、 $c_5 = -c_1 - c_2 - c_3 - c_4 = s_3 - s_4 - s_5 - s_2 (= (-1, 2, 1, -1, -1, 0, -1))$ となり、 c_5 は s_1 とは一致しない。 $c_1 = -s_3$ が原因であり、 $c_1 = s_3$ とすれば、 C_{f+} と S は行と列を適当に並びかえれば一致する。

4.2 鎖状木の基本カットセット系

図4に示すように、資本⑤に始まり、売掛金②、現金①、原料③、製品④という一連の鎖状の取引連鎖(⑤→②→①→③→④)を考えよう。ここでも②→①の枝取引7を設定した(取引額 $t_7 = 0$)。この例では、偶然にも、取引連鎖の方向と各枝の方向が一致した。鎖状木の木枝集合は{6, 7, 1, 2}であり、各木枝に対応にしたカットセット $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ の方向を定めた。

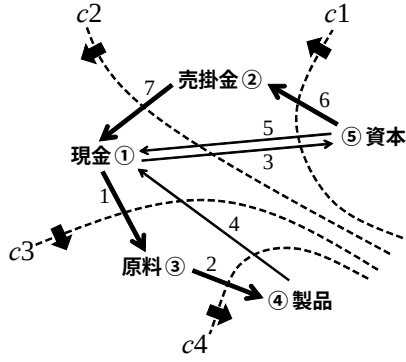


図4：鎖状木の基本カットセット系の例

(12)に基本カットセット行列 C_f 、(13)に枝取引額列ベクトル $\mathbf{t}$ 、(14)にカットセット別変動額列ベクトル $\mathbf{f}_c$ を示す。

$$C_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= (t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_1, t_2)^T \\ &= (11, 12, 7, 5, 0, 10, 8)^T \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_c &= C_f \mathbf{t} \\ &= C_\lambda \mathbf{t}_\lambda + \mathbf{t}_\rho \\ &= \begin{pmatrix} -t_3 + t_5 \\ -t_3 + t_5 \\ -t_4 \\ -t_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_6 \\ t_7 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

このように鎖状木を選ぶと、 $\mathbf{f}_c$ の各要素は勘定ノード集合を1つずつ追加した勘定グループ集合に対する収支変動額を与える。例えば、 $\mathbf{f}_c$ の第1要素はカットセット1に対応し、資本勘定の収支、第2要素は「資本勘定と売掛金勘定」の和、第3要素は「資本、売掛金、現金の各勘定」の和、第4要素は「資本、売掛金、現金、原料の各勘定」の和に対応する収支である。

5. おわりに

複式簿記会計システムにカットセット解析を適用する際のカットセット群として、木Tに対応した基本カットセット系を選定するアプローチを提案した。木枝に対応する取引額を、その木枝が決定するカットセットに関する補木枝からの取引額により修正することにより、グループ別収支残高変動額が計算できることを示した ($\mathbf{f}_c = C_\lambda \mathbf{t}_\lambda + \mathbf{t}_\rho$)。

木に相当する部分は取引ネットワークにおいて主要な取引区間に対応するが、どのような木を選定するのが好ましいかは、財務会計処理上の方針とも密接に関連し、今後の課題である。

なお、本論文では、木、補木、カットセット、閉路などに関連したグラフ理論の用語として、成書[2]を参考にしたため、文献[1](その1)の用語とは一部異なるが、矛盾ない表現とした。

また、一連の論文(その1)–(その5)では、勘定科目ノード間キャッシュフローのネットワーク的遷移を複式簿記としてとらえているが、様々な流れ(flow)の問題に対して同型的な問題は数多く存在する(例えば[3])。これらの諸問題に対しても一連の考察が適用できる。

参考文献

- [1]篠原正明、篠原健：複式簿記理論の位相幾何学的考察(その1)–カットセット解析一、平成20年度日本大学生産工学部第41回学術講演会・数理情報部会講演論文集(2008.12).
- [2]伊理、白川、梶谷、篠田：演習グラフ理論、コロナ社(1983).
- [3]日高桂、篠原正明：自転車ITSの基本構想、平成20年度日本大学生産工学部第34回学術講演会・数理情報部会講演論文集, pp37-40(2001.12).