7-49

複式簿記理論の位相幾何学的考察(その 4)

― 歪対称な勘定ノードグループ間複式簿記行列 ―

日大生産工　○篠原正明
情報システム研究所　篠原健

1.　はじめに

(その 3) [1]において、複式簿記システムにカットセット解析を適用時の複式簿記行列は、$\mathrm{K}=\mathrm{T}-\mathrm{T}^{\mathrm{T}}$ から、$Q\mathrm{K}=Q\mathrm{T}-Q\mathrm{T}^{\mathrm{T}}$ となり、歪対称性が失われることを示した。勘定ノード群をまとめて 1 つのグループとした時に、そのグループを 1 つの勘定科目として会計処理・財務分析などを行う場合にも、複式簿記の基本特性である歪対称性が満たされることが望まれる。

本論文では、歪対称性を満足するグループ間複式簿記行列の構成法を提案し、例題により妥当性を検討する。さらに、そのグループ間複式簿記行列を使用して、グループ別収支残高変動分を、ノード間複式簿記行列の時と同じ様式で計算するために、カットセット群が満足すべき条件を考察した。

2.　歪対称性とは

正方行列 A が $\mathrm{A}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$ を満たせば、対称であり、$\mathrm{A}=-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$ を満たせば歪対称である。さらに、任意の正方行列は、対称行列と歪対称行列の和で一意に表わせる。歪対称行列は反対称行列、あるいは交代行列とも呼ばれる。又、歪対称行列の固有値は 0 か純虚数、奇数次歪対称行列の行列式は零である。ちなみに、$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}=\mathrm{A}^{-1}$ を満たせば、直交行列である。

［性質 1］歪対称行列 A の全要素和は零($\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathbf{1}=0$)である。□

［性質 2］歪対称行列 A の列和行ベクトル $\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ と行和列ベクトル $\mathrm{A}\mathbf{1}$ は、一方を転置して和すれば零($(\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{\mathrm{T}}+\mathrm{A}\mathbf{1}=\mathbf{0}$)である。あるいは $\mathrm{A}\mathbf{1}=-(\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{\mathrm{T}}$。□

3.　歪対称性を持つ勘定ノードグループ間複式簿記行列の構成

T を勘定ノード間取引行列とすると、勘定ノード間複式簿記行列 K は、(1)式で与えられる。

$$\mathrm{K}=\mathrm{T}-\mathrm{T}^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

注目するカットセット群のカットセット‐節点接続行列を Q とし(1)式の左から Q、右から Q^{T} を掛けると、(2)を得る。

$$Q\mathrm{K}Q^{\mathrm{T}}=Q\mathrm{T}Q^{\mathrm{T}}-Q\mathrm{T}^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

(2)の左辺を $G\,(=Q\mathrm{K}Q^{\mathrm{T}})$ とし、これを勘定ノードグループ間複式簿記行列(あるいは簡単に、グループ間複式簿記行列)と呼ぶ。カットセットとは、あるノード集合をそれ以外のノード集合から切り離す枝集合であるが、同時に、切り離されるノード集合(の 1 つ)を指定する。従って、カットセット‐節点接続行列 Q は、節点集合‐節点接続行列とも解釈できる。

［定理 1］

(2)式により定義されるグループ間複式簿記行列 G は歪対称性を有する。□

(証明)

$$G^{\mathrm{T}}=\left(Q\mathrm{K}Q^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=Q\mathrm{K}^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

ところで、ノード間複式簿記行列 K は歪対称なので、$\mathrm{K}^{\mathrm{T}}=-\mathrm{K}$　(4)が成立し、これを(3)に代入すると(5)式を得る。

$$G^{\mathrm{T}}=Q\left(-\mathrm{K}\right)Q^{\mathrm{T}}=-Q\mathrm{K}Q^{\mathrm{T}}=-G \tag{5}$$

(*Q.E.D.*)

Topological Consideration on Double-entry Bookkeeping System
－Part Ⅳ: Skew-symmetric Spreadsheet Matrix for Accounting Node Groups－
Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

4. グループ間複式簿記行列の例題

文献[1]の 4 章の例題において、グループ間複式簿記行列Gを計算する。図 1 に取引ネットワークと注目カットセット群$\{c2,c4,c5\}$を示す。

ここで、(　)内の数値の単位は取引金額(万円)である。又、カットセット $c2$ はノード集合{①,②}、カットセット $c4$ はノード集合{③,④}、カットセット $c5$ はノード集合{⑤}に対応している。

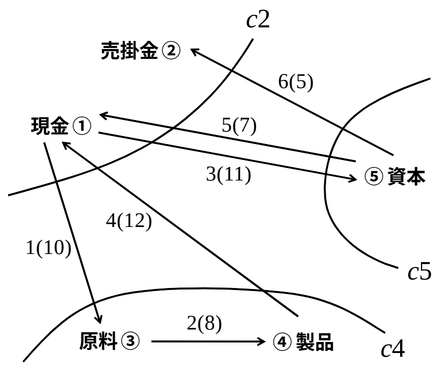

図 1：ノード間取引ネットワーク

以下に、節点‐枝接続行列 S、カットセット‐枝接続行列 C、カットセット‐節点接続行列 Q、取引行列Tとその転置T^{T}、ノード間複式簿記行列K、カットセット解析での複式簿記行列$R = Q\mathrm{T} - Q\mathrm{T}^{\mathrm{T}}$とその構成要素$Q\mathrm{T}$、$Q\mathrm{T}^{\mathrm{T}}$を示す。

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\mathrm{T}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 12 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\mathrm{K} = \mathrm{T} - \mathrm{T}^{\mathrm{T}}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & -12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ -10 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 12 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$Q\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & 11 \\ 12 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$Q\mathrm{T}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 12 & 12 \\ 10 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$R = Q\mathrm{T} - Q\mathrm{T}^{\mathrm{T}}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & -12 & -1 \\ 2 & 0 & -8 & 8 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

グループ間複式簿記行列Gは次式(15)で与えられ、その構成要素$Q\mathrm{T}Q^{\mathrm{T}}$、$Q\mathrm{T}^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}$と共に以下に示す。

$$G = Q\mathrm{K}Q^{\mathrm{T}} = Q\mathrm{T}Q^{\mathrm{T}} - Q\mathrm{T}^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

$$Q\mathrm{T}Q^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 11 \\ 12 & 8 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$Q\mathrm{T}^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 12 \\ 10 & 8 & 0 \\ 11 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

(18)式で与えられるグループ間複式簿記行列Gは、歪対称性を有し、従って、2 章の性質 1、性質 2 の会計処理上の検証のための諸性質を備え持つことがわかる。図 2 にグループ間の取引額のみに注目したグループ間取引ネットワークを示す。

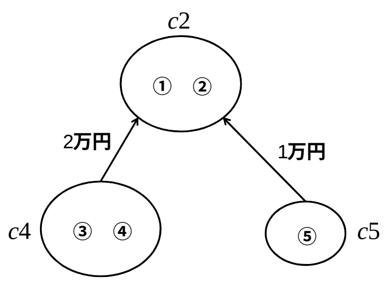

図 2：グループ間取引ネットワーク

$c2$={①,②}から $c4$={③,④}へは 10－12=－2 (=g_{12})、

すなわち、$c4$ から $c2$ へ 2 万円(=g_{21})、$c2$ から $c5$ へは 11−7−5=−1 (=g_{31})、すなわち、$c5$ から $c2$ へ 1 万円 (=g_{31})の取引集計が存在する。

ノード集合 $c4$={③,④}内に内部取引が存在するが、グループ内取引は零である(8−8 =0=g_{22})。

5. バランス残高計算法

節点解析では以下の関係式が成立している。

$$\mathrm{K}\mathbf{1} = S\boldsymbol{t} \tag{19}$$

$$S\boldsymbol{t} = \boldsymbol{f}_S \tag{20}$$

$$\mathrm{K}\mathbf{1} = \boldsymbol{f}_S \tag{21}$$

但し、$\boldsymbol{t}$ は取引額枝ベクトル、$\boldsymbol{f}_S$ はノード別変動分(バランス残高)ベクトルである。すなわち、(21)よりノード間複式簿記行列 K の右からオール 1 の列ベクトルを乗ずれば、バランス残高ベクトルが計算できる。果して、グループ間複式簿記行列 G に関しては、同様の性質が成り立つだろうか？

なお、(その 3)[1]において、カットセット別変動分ベクトル $\boldsymbol{f}_c$ は式(22)で計算できることを示したが、これは QK を用いており、G を使用していない。

$$Q\mathrm{K}\mathbf{1} = \boldsymbol{f}_c \tag{22}$$

［定理 2］

カットセット群 $C=\{c_1, c_2, \cdots, c_c\}$がノード集合の完全分割に対応する場合には、次式(23)によりグループ別変動分 $\boldsymbol{f}_c$ が与えられる。

$$\boldsymbol{f}_c = G\mathbf{1} \tag{23}$$ □

定理 2 を証明する前に「ノード集合の完全分割」を説明する。

［定義 1］

ノード集合の完全分割とは、カットセット‐節点接続行列 Q において、各列に 1 が 1 回のみ発生する場合のカットセット群に対応したノード集合群(グループ群)である。□

すなわち各ノードはどこか 1 つのグループのみに所属し多重所属は認められない。完全分割に対応した Q の例を(24)に、そのノード集合の分割図を図 3 に示す。

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

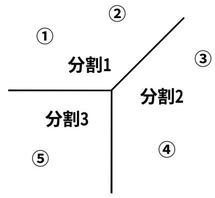

図 3：ノード集合の完全分割の例

カットセット‐節点接続行列 $Q=\{q_{ij}\}$の(i, j)要素は、カットセット i が節点(カットセット) j を同じ向きで含む時に $q_{ij}=1$、逆方向で含む時に $q_{ij}=-1$、その他の場合に $q_{ij}=0$ である。完全分割では、各カットセットの向きを各分割ノード集合から外向きにとれば、q_{ij} は 0 か 1 で、−1 はとらないようにできる。さらに、各列において 1 が 1 回のみ発生する。すなわちカットセット i が外向きに切離すノード集合(分割 i)に属するノード j についてのみ $q_{ij}=1$で、その他は $q_{ij}=0$ となる。

(定理 2 の証明)

節点数をn、カットセット数をcとするならば、Qは $c \times n$行列である。$\mathbf{1}_m$をすべての要素が 1 からなる大きさmの列ベクトルとするならば、カットセット群がノード集合の完全分割に対応する時には、次式が成立する。

$$Q^{\mathrm{T}}\mathbf{1}_c = \mathbf{1}_n \tag{25}$$

又、(22)式での $\mathbf{1}$ は $\mathbf{1}_n$ であるので、(26)が成立する。

$$Q\mathrm{K}\mathbf{1}_n = \boldsymbol{f}_c \tag{26}$$

(26)に(25)を代入すると、(27)を得る。

$$Q\mathrm{K}Q^{\mathrm{T}}\mathbf{1}_c = \boldsymbol{f}_c \tag{27}$$

$G = Q\mathrm{K}Q^{\mathrm{T}}$ なので、(23)を得る。 (*Q.E.D.*)

6. グループ別収支残高変動分ベクトルの計算例

6.1 完全分割での計算例

本論文 4 章でとりあげた文献[1]4 章の例題において、グループ間複式簿記行列 G は(18)で与えられる。G の右から $\mathbf{1}_3$ を乗じることにより、$\boldsymbol{f}_c$ を得る。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_c &= G\mathbf{1}_3 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{28}$$

これは、文献[1](その 3)の(19)式あるいは文献[2]

(その 1)の(12)式に一致する。又、定理の証明での(25)式も以下に示すように成立する(但し、$n = 5, c = 3$)。

$$Q^{\mathrm{T}}\mathbf{1}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

6.2　不完全分割での計算例 1

完全分割でないカットセット群として、カットセット－節点接続行列 Q が(30)で与えられる場合を考える。

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{30}$$

第 1 カットセットは節点集合{①,②}から外向きに切り離し、第 2 カットセットは節点集合{③,④}から外向きに切り離し、第 3 カットセットは節点集合{④,⑤}から外向きに切り離す。第 4 列に 1 が 2 つ存在するので、完全分割ではない。従って、(31)式は成立しない。

$$Q^{\mathrm{T}}\mathbf{1}_3 = \mathbf{1}_5 \tag{31}$$

(31)式の代わりに、(32)が成立する。

$$Q^{\mathrm{T}}\mathbf{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

従って、定理 2 は成立しない。ちなみに、$G, G\mathbf{1}, \boldsymbol{f}_c$ は以下の通りである。

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -13 \\ 2 & 0 & 8 \\ 13 & -8 & 0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

$$G\mathbf{1} = \begin{pmatrix} -15 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$\boldsymbol{f}_c = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{35}$$

6.3　不完全分割での計算例 2

Q が(36)で与えられる場合を考えると、(37)式となる。

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$Q^{\mathrm{T}}\mathbf{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{1}_5 \tag{37}$$

従って、定理 2 は成立しない。ちなみに、$G, G\mathbf{1}, \boldsymbol{f}_c$ は以下の通り。

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 10 & -1 \\ -10 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

$$G\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

$$\boldsymbol{f}_c = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{40}$$

6.4　考察

不完全分割では一般に $G^{\mathrm{T}}\mathbf{1}_c = \mathbf{1}_n$ が成立しない。

そこで、もし、$Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} = \mathbf{1}_n$　(41)を満足する c 次元列ベクトル $\boldsymbol{e}$ が存在するならば、(41)を(26)に代入すると、(42),(43)を得る。

$$Q\mathrm{K}Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{f}_c \tag{42}$$

$$G\boldsymbol{e} = \boldsymbol{f}_c \tag{43}$$

見かけ上は、グループ間複式簿記行列 G に右から定数項列ベクトル $\boldsymbol{e}$ を乗じることにより、グループ別収支残高変動分ベクトル $\boldsymbol{f}_c$ を計算できる。しかしながら、6.2 節と 6.3 節の 2 つの例において、$Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} = \mathbf{1}_n$ を満たす $\boldsymbol{e}$ は存在しない。

7.　おわりに

複式簿記システムにカットセット解析を適用した時のグループ間複式簿記行列 G が、カットセット群がノード集合の完全分割に対応する時に歪対称性を満足し、さらに、ノード間複式簿記行列の時と同じ様式でグループ別収支残高変動分を計算できることを示した。
(5 章、定理 2)。不完全分割での計算理論確立は今後の課題である。

参考文献

[1] 篠原正明、篠原健：複式簿記理論の位相幾何学的考察(その３) －勘定ノードグループ間の複式簿記行列－、平成 20 年度日本大学生産工学部第 41 回学術講演会・数理情報部会講演論文集(2008.12).

[2] 篠原正明、篠原健：複式簿記理論の位相幾何学的考察(その 1)－カットセット解析－、平成 20 年度日本大学生産工学部第 41 回学術講演会･数理情報部会講演論文集(2008.12).