7-46

# 重み和が必ずしも1でない一般化平均法

日大生産工　　○篠原　正明
情報システム研究所　　篠原　健

## 1. はじめに

重み和が必ずしも1でない一般化平均法は、例えば、個別整合度の集合$\{CI_i : i = 0, 1, 2, \ldots, N\}$から全体整合度$CI_{AHP}$を推定する研究([1],[2].[3]など)、一般化平均不等式計画法([4]など)、などにおいて、平均操作を行う際の対象が必ずしも「単位数(重み和)＝1」でなく、一般に「単位数(重み和)＝$m$」となる場合に議論となる。

「一般化平均」については、[5]においてその一般化を論じたが、本論文のテーマ「重み和が必ずしも1でない一般化平均法」も1つの一般化である。

## 2. 重み和が必ずしも1でない一般化平均法

$n$個の正値データ$X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $(x_i > 0)$、$n$個の重み$W_n = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ $(\Sigma w_i = m)$に対する$p$次一般化平均を次式(1)で定義する。

$$G(p; X_n, W_n, m) = \left(\sum w_i x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1)$$

データ値$x_i$は正であるが、重み$w_i$は必ずしも正に限らないが、通常は正値$(w_i > 0)$と仮定する。

[定理1]

$p < q$なる$p, q (\neq 0)$について、以下の不等式(2)が成立する。

$$m^{-\frac{1}{p}} G(p; X_n, W_n, m) \leq m^{-\frac{1}{q}} G(q; X_n, W_n, m) \qquad (2)$$

(証明)　$v_i = w_i / m$とすると、$(\Sigma v_i = 1)$となり、次の不等式が成立する(但し、$V_n = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$)。

$$G(p; X_n, V_n, 1) \leq G(q; X_n, V_n, 1) \qquad (3)$$

但し、

$$G(p; X_n, V_n, 1) = \left(\sum v_i x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (4)$$

ところで、(1)より、

$$\begin{aligned} G(p; X_n, W_n, m) &= \left(\sum w_i x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(m \sum \frac{w_i}{m} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= m^{\frac{1}{p}} \left(\sum v_i x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= m^{\frac{1}{p}} G(p; X_n, V_n, 1) \end{aligned} \qquad (5)$$

すなわち、$G(p; X_n, V_n, 1) = m^{-\frac{1}{p}} G(p; X_n, W_n, m)$ (6)

(6)を(3)に代入すると、(2)式を得る。　[Q.E.D.]

定理1により、$p, q \neq 0$の条件下で、重み和$m$の2つの一般化平均値の大小関係式が成立する。$p \to 0$($p = 0$と略記)の幾何平均の場合だけ、以下の定理2により特別扱いする。

[定理2]

$p = 0$の幾何平均$G(0; X_n, W_n, m)$については、次式が成立する。

$$G(0; X_n, W_n, m) = G(0; X_n, V_n, 1)^m \qquad (7)$$

(証明)

$$\begin{aligned} G(0; X_n, W_n, m) &= \prod x_i^{w_i} \\ &= \prod x_i^{m v_i} \\ &= \left(\prod x_i^{v_i}\right)^m \\ &= G(0; X_n, V_n, 1)^m \end{aligned} \qquad (8)$$

[Q.E.D.]

定理2より、定理1でもし$p = 0$ならば、(2)式のかわりに次の(9)式が成立する。

$$G(0; X_n, W_n, m)^{\frac{1}{m}} \leq m^{-\frac{1}{q}} G(q; X_n, W_n, m) \qquad (9)$$

---

Generalized Mean with Weight Sum $m$ being not always equal to 1

Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

これをまとめると次の定理3となる。

[定理3]

$0 < q$なる$q$について、不等式(10)が、$0 > q$なる$q$について不等式(11)が成立する。

$$G(0; X_n, W_n, m)^{\frac{1}{m}} \le m^{-\frac{1}{q}} G(q; X_n, W_n, m) \tag{10}$$

$$m^{-\frac{1}{q}} G(q; X_n, W_n, m) \le G(0; X_n, W_n, m)^{\frac{1}{m}} \tag{11}$$

(証明略)

最後に、定理1をさらに一般化した定理4を以下に示す。すなわち、$p$次一般化平均での重み$W_n(p)$と$q$次一般化平均での重み$W_n(q)$は、比例しているが、要素毎に定数倍$K$の関係にある場合である。以下にパラメタを定義する。

$$W_n(p) = \{w_1(p), w_2(p), \ldots, w_n(p)\} \tag{12}$$

$$W_n(q) = \{w_1(q), w_2(q), \ldots, w_n(q)\} \tag{13}$$

$$w_i(p) = K w_i(q),\ i = 1, \ldots n \tag{14}$$

$$\sum w_i(p) = m(p) \tag{15}$$

$$\sum w_i(q) = m(q) \tag{16}$$

$$K = m(p)/m(q) \tag{17}$$

[定理4]

$p < q$なる$p, q(\neq 0)$について、不等式(18)が成立する。

$$m(p)^{-\frac{1}{p}} G(p; X_n, W_n(p), m(p)) \le m(q)^{-\frac{1}{q}} G(q; X_n, W_n(q), m(q)) \tag{18}$$

(証明) $v_i = w_i(p) / m(p) = w_i(q) / m(q)$とすると、$\Sigma v_i = 1$となり、次の不等式が成立する(但し、$V_n = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$)。

$$G(p; X_n, V_n, 1) \le G(q; X_n, V_n, 1) \tag{19}$$

ところで、

$$G(p; X_n, W_n(p), m(p)) = \left(\sum w_i(p) x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(m(p) \sum \frac{w_i(p)}{m(p)} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= m(p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum v_i x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= m(p)^{\frac{1}{p}} G(p; X_n, V_n, 1) \tag{20}$$

(20)を(19)に代入すると(18)を得る。 [Q.E.D.]

## 3. 数値計算平均値の傾向についての考察

### 3.1 重み和$m = 1$の場合の性質

$p$次一般化平均($m = 1$)は(1)式において$m = 1$とした次式(21)で定義される。

$$G(p; X_n, W_n, 1) = \left(\sum w_i x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{21}$$

ここで、$X_n$は$n$個の正値データ$X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ($x_i > 0$)であり、その中の最大値を$x_{\max}$、最小値を$x_{\min}$とするならば、任意の$p$について次の定理5が成立する。

[定理5]

$$x_{\min} \le G(p; X_n, W_n, 1) \le x_{\max} \tag{22}$$

(証明略)

ここで、$x_{\min}$は$p \to -\infty$、$x_{\max}$は$p \to +\infty$での$p$次一般化平均($m = 1$)が最小値、最大値に対応することからわかる。従って、「$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x_0$」のすべてデータ値が等しければ、$p$次一般化平均値はすべての$p$値に対して等しく$x_0$となる。又、$p < q$ならば、$G(p; X_n, W_n, 1) \le G(q; X_n, W_n, 1)$が成立するが、両平均値の差$D(p,q)$は$p$あるいは$q$を固定するとパラメタ値の差$d = q - p$が大きいほど一般に増加する。

$$D(p,q) = G(q; X_n, W_n, 1) - G(p; X_n, W_n, 1) \tag{23}$$

逆に言えば、$p$と$q$が近い値ならば、両者の差はわずかであると言える。

[数値例1] $n = 2, p = 1, x_1 = 0.1, x_2 = 0.2, W_2 = (0.5, 0.5)$とし、平均値の差$D(1, q)$を(24)式で計算する。パラメタ値$q$の関数として、

$$D(1,q) = \left(\left((0.1)^q + (0.2)^q\right)/2\right)^{1/q} - 0.15 \tag{24}$$

相対誤差$RD(1,q)$を(25)式により計算し、図1に示す。

$$RD(1,q) = D(1,q)/0.15 \tag{25}$$

[数値例2] $n = 2, p = 1, q = 2, x_1 = 0.1, x_2 = 0.2, W_2 = (0.5, 0.5)$とし、平均値の差$D(1, 2)$を2番目のデータ値$x_2$の関数として、(26)式で計算する。

$$D(1,2;x_2) = \left(\left((0.1)^2 + (x_2)^2\right)/2\right)^{1/2} - (0.1 + x_2)/2 \tag{26}$$

相対誤差$RD(1, 2; x_2)$を(27)式により計算し、図2に示す。

$$RD(1,2;x_2) = D(1,2;x_2)/\left((0.1 + x_2)/2\right) \tag{27}$$

文献[1]において、一対比較値$a_{ij}$の真値からの「乖離

度合の平均値$\bar{\delta}$の2乗値$\bar{\delta}^2$」と「乖離度合の2乗の平均値$\overline{\delta^2}$」の間にほぼ等しい大小関係「$\overline{\delta^2}$　$\bar{\delta}^2$」(厳密には、$\overline{\delta^2} \geq \bar{\delta}^2$)が観察されたが、数値例1において$q=2$の場合、数値例2において$0.05 \leq x_2 \leq 0.2$の場合において、いずれも相対誤差は5%以下であり[1]での近似関係「$\overline{\delta^2}$　$\bar{\delta}^2$」の妥当性が示された。

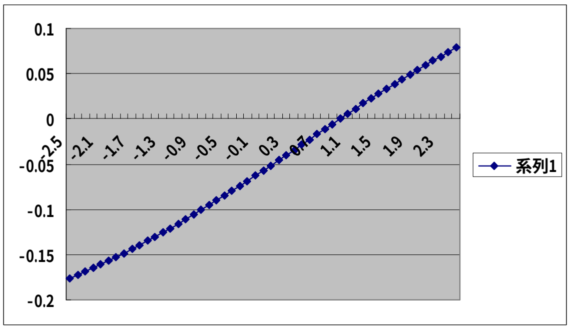


図1:パラメタ$q$値(横軸)に対する相対誤差$RD(1,q)$の特性

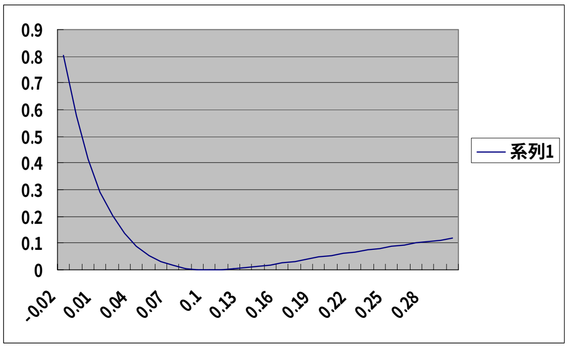


図2:二番目のデータ値$x_2$(横軸)に対する相対誤差$RD(1,2;x_2)$の特性

### 3.2　重み和$m \neq 1$の場合の性質

前節3.1の考察により、重み和$m=1$での一般化平均値はデータ$X_n=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ $(x_i>0)$のバラツキが小さいならば、定性的にほぼ同じ値(近似値)となることがわかった(定理5より、平均値は$\max\{x_i\}$と$\min\{x_i\}$の間に存在する)。さらに、次数パラメタ$p$が近いと平均値も近いことが数値実験よりわかる(図1)。

本節では、重み和$m \neq 1$の場合(但し、$m>0$を仮定)の$p$次一般化平均値$G(p;X_n,W_n,m)$と重み和$m=1$の場合の$p$次一般化平均値$G(p;X_n,V_n,1)$の間の関係式(6)にもとづき、$m \neq 1$の場合の一般化平均値の漸近的特性を調べる(但し、$W_n=mV_n$)。

関係式(6)を(28)として再掲する。

$$G(p;X_n,V_n,1)=m^{-\frac{1}{p}}G(p;X_n,W_n,m) \qquad (28)$$

前にも述べたが、重み和$m=1$ではデータのバラツキが小さいという条件下では、$p$次一般化平均値$G(p;X_n,V_n,1)$は近似的にある同じ値$M$となる。すなわち、次式(29)が成立する。

$$G(p;X_n,V_n,1) \quad M \qquad (29)$$

(29)を(28)に代入すると、(30)あるいは(31)式を得る。

$$G(p;X_n,W_n,m) \quad M\cdot m^{\frac{1}{p}} \qquad (30)$$

$$\frac{1}{m}G(p;X_n,W_n,m)^p \quad M^p \qquad (31)$$

但し、(30),(31)は$p \neq 0$の場合で、定理2の(7)式より$p=0$では(32)となる。

$$G(0;X_n,W_n,m) \quad M^m \qquad (32)$$

[数値例3] $n=2, p=1, x_1=0.1, x_2=0.2, W_2=(0.5m, 0.5m)$として、$m$をパラメタとして$G(1;X_n,W_n,m)$を計算すると(33)式を得る(但し、$M=0.15$)。

$$G(1;X_n,W_n,m)=M\cdot m \qquad (33)$$

[数値例4] $n=2, p=0, x_1=0.1, x_2=0.2, W_2=(0.5m, 0.5m)$として、$m$をパラメタとして$G(0;X_n,W_n,m)$を計算すると(34)式を得る(但し、$M=\sqrt{0.02}$)。

$$G(0;X_n,W_n,m)=M^m \qquad (34)$$

[数値例5] $n=2, p=2, x_1=0.1, x_2=0.2, W_2=(0.5m, 0.5m)$として、$m$をパラメタとして$G(2;X_n,W_n,m)$を計算すると(35)式を得る(但し、$M=\sqrt{0.025}$)。

$$G(2;X_n,W_n,m)=M\cdot\sqrt{m} \qquad (35)$$

[数値例6] $n=2, p=-1, x_1=0.1, x_2=0.2, W_2=(0.5m, 0.5m)$として、$m$をパラメタとして$G(-1;X_n,W_n,m)$を計算すると(35)式を得る(但し、$M=2/15 \quad 0.1333$)。

$$G(-1;X_n,W_n,m)=M/m \qquad (36)$$

数値例3,4,5,6より、以下の性質1,2が成立する。

[性質1]

$p>0$では重み和$m$の増加と共に($M\cdot m^{\frac{1}{p}}$のオーダで)一般化平均値は増加し、$p<0$では重み和$m$の増加と共に($M\cdot m^{\frac{1}{p}}$のオーダで)一般化平均値は減少する。

□

[性質2]

幾何平均($p=0$)では、平均値$M>1$で重み和$m$の増加と共に($M^m$ のオーダで) 重み和$m$幾何平均値は増加し、$M<1$では($M^m$ のオーダで) 減少する。但し、$M=1$では$m$に依存せず、一定である。□

## 4. AHPの全体整合度での重み和と平均操作

Saaty[6]はAHP全体の整合度の指標として、単純な重み和$m$が1ではない算術平均にもとづく(37)式を提案している。

$$\mathrm{CI}_{\mathrm{SaatyAHP}}=\sum w_i\mathrm{CI}_i \tag{37}$$

一方、篠原ら[1,2,3]は、平方根CIに対して(38)あるいは(39)式を提案している。

$$\sqrt{\mathrm{CI}_{\mathrm{RootAHP}}}=\sum w_i\sqrt{\mathrm{CI}_i} \tag{38}$$

$$\mathrm{CI}_{\mathrm{RootAHP}}=\left(\sum w_i\sqrt{\mathrm{CI}_i}\right)^2 \tag{39}$$

すなわち、全体整合度の指標は一般化平均の意味において、算術平均($p=1$)よりも、平方根平均($p=0.5$)の方が適切であると主張している。もし、重み和$m=1$であれば、前章の議論より、(37)と(39)は近似することが言えるが、$m\neq1$(例えば、$m=2, m=3$)では、(37)と(39)はオーダ上各々$Mm$と$Mm^2$となり大きな差が生じてしまう。

[数値例7]　$\mathrm{CI}_0=0.1, \mathrm{CI}_1=0.2, \mathrm{CI}_2=0, \mathrm{CI}_3=0.1, w_0=1, w_1=0.2, w_2=0.5, w_3=0.3$とすると(すなわち$m=2$)、(37)と(39)による全体整合度$\mathrm{CI}_{\mathrm{SaatyAHP}}, \mathrm{CI}_{\mathrm{RootAHP}}$は以下の通りである。

$$\mathrm{CI}_{\mathrm{SaatyAHP}}=0.17 \tag{40}$$

$$\mathrm{CI}_{\mathrm{RootAHP}}=0.25 \tag{41}$$

ちなみに、$m=1$に重みを正規化した場合は以下の通りであり、若干の差は認められるが、大きな差ではない。

$$\mathrm{CI}_{\mathrm{SaatyAHP}}=0.085 \tag{42}$$

$$\mathrm{CI}_{\mathrm{RootAHP}}=0.063 \tag{43}$$

## 5. おわりに

総和時の重み和$m$が1に限定されない一般化平均操作の特性を調べた。平均化操作の対象となるデータ値のバラツキが小さいならば、概して、$m=1$時の一般化平均値は$p$値に対して大きく変動しない、一定値付近の値をとる。$m\neq1$時の$p$次一般化平均値を$m=1$時の$p$次一般化平均値の関数で表現した。これにより、$m\neq1$時の$p$次一般化平均値の特性を考察した。さらに、4章ではAHP全体整合度計算での平均操作の重み和$m=1$とすることが各種平均操作の全体整合度を比較する上で、大きな差異が発生しにくいという点より、望ましいことを、3章の議論にもとづき主張した。

## 参考文献


[1] Masaaki Shinohara and Keikichi Osawa : Consistency measure for the whole AHP decision making, ISAHP2007, pp.SAT6/1/1-9 Chile(August 3-6, 2007).

[2] 宇田川美紀：AHP全体整合度に関する研究、平成20年度 日本大学大学院生産工学研究科 博士前期課程論文(2009.3).

[3] 篠原正明、大澤慶吉、篠原健：AHPにおける個別整合度と全体整合度、日本オペレーションズ・リサーチ学会2006年秋季研究発表論文集、2-D-6、pp.242-243(2006.9).

[4] 篠原正明、篠原健：一般化平均と最適化(その1)～(その4)、日本大学生産工学部 第42回学術講演会 数理情報部会講演概要(2009.12).

[5] 篠原正明、篠原健：一般化平均概念の一般化、日本大学生産工学部 第40回学術講演会 数理情報部会講演概要、pp.55-56(2007.12).

[6] T.L.Saaty : Fundamentals of Decision Making and Priority Theory, RWS Publications(2000).