7-45

一般化平均と最適化

(その４)制約有・無での一般論

日大生産工　○篠原　正明

情報システム研究所　篠原　健

1.はじめに

(その 1)では幾何計画法のレビュー、(その 2)では調和計画法、(その 3)では (p,q) 計画法について、例題を通して説明した。(その４)では、一般化平均不等式計画法の制約なし／ありでの一般論(特に幾何計画法について)を解説する。

２.制約なしでの一般論(幾何計画法)

少々複雑な 3 変数 $(x>0, y>0, z>0)$ の制約なし幾何計画問題を最初に解く。

[例題 1 :3 変数制約なし]

目的関数: $40xy+20xz+10yz+\dfrac{40}{xyz}$

制約条件:なし $(x>0, y>0, z>0)$

[例題 1 の解]

目的関数に算術幾何不等式適用する。

$$f(x,y,z)=40xy+20xz+10yz+\frac{40}{xyz}$$

$$=w_1\left(\frac{40xy}{w_1}\right)+w_2\left(\frac{20xz}{w_2}\right)+w_3\left(\frac{10yz}{w_3}\right)+w_4\left(\frac{40}{w_4xyz}\right)$$

$$\geq\left(\frac{40xy}{w_1}\right)^{w_1}\left(\frac{20xy}{w_2}\right)^{w_2}\left(\frac{10yz}{w_3}\right)^{w_3}\left(\frac{40}{w_4xyz}\right)^{w_4} \tag{1}$$

$$=\left(\frac{40}{w_1}\right)^{w_1}\left(\frac{20}{w_2}\right)^{w_2}\left(\frac{10}{w_3}\right)^{w_3}\left(\frac{40}{w_4}\right)^{w_4} \tag{2}$$

$$x^{w_1+w_2-w_4}y^{w_1+w_3-w_4}z^{w_2+w_3-w}$$

右辺が定数項になることが望まれるので、x,y,z の指数部＝0 と置くと、以下の(３),(４),(５)式を得る。

$$w_1+w_2-w_4=0 \tag{3}$$

$$w_1+w_3-w_4=0 \tag{4}$$

$$w_2+w_3-w_4=0 \tag{5}$$

(3),(4),(5)に　$w_1+w_2+w_3+w_4=1$　(6)

を付加して、連立方程式(3)〜(6)を解くと以下を得る。

$$w_1=1/5,\ w_2=1/5,\ w_3=1/5,\ w_4=2/5 \tag{7}$$

従って、$f(x,y,z)$ の最小値は(8)式＝100 で与えられる。

$$f_{\min}=(200)^{\frac{1}{5}}(100)^{\frac{1}{5}}(50)^{\frac{1}{5}}(100)^{\frac{2}{5}}$$

$$=(200\times100\times50\times100\times100)^{\frac{1}{5}}=100 \tag{8}$$

また、次式が成立するときに最小値が達成される。

$$\left(\frac{40xy}{w_1}\right)=\left(\frac{20xz}{w_2}\right)=\left(\frac{10yz}{w_3}\right)=\left(\frac{40}{w_4xyz}\right) \tag{9}$$

(1)と(9)と $f(x,y,z)$ 最小値＝100 により、(10)を得る。

$$w_1\left(\frac{40xy}{w_1}\right)+w_2\left(\frac{20xz}{w_2}\right)+w_3\left(\frac{10yz}{w_3}\right)+w_4\left(\frac{40}{w_4xyz}\right)=100 \tag{10}$$

すなわち、$x=\dfrac{1}{2}, y=1, z=2$　(11)

$$\boxed{\text{解: } f_{\min}=100, x=\frac{1}{2}, y=1, z=2}$$

次に、制約無し m 変数 $(t_1,t_2,\cdots t_m)$ の幾何計画法最適化の一般論を例題 2 として展開する。

[例題 2: m 変数 n 項制約無し]

目的関数： $f(t)=f(t_1,t_2,\ldots,t_m)$

$$=\sum_{i=1}^{n}U_i(t) \tag{12}$$

但し、$U_i=C_i\displaystyle\prod_{j=1}^{m}t_j^{a_{ij}}$

制約条件：なし $(t_j>0, j=1,\ldots,m)$

Generalized Mean Inequality and Optimization

－Part Ⅳ : Generalization with and without Constraints－

Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

[例題２の解]

目的関数に算術幾何不等式を適用する。

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i\prod_{j=1}^{m}t_j^{a_{ij}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}w_i\left(C_i\prod_{j=1}^{m}\left(w_i^{-1}t_j^{a_{ij}}\right)\right)$$

$$\geq\prod_{i=1}^{n}\left(C_i\prod_{j=1}^{m}\left(w_i^{-1}t_j^{a_{ij}}\right)\right)^{w_i}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{C_i}{w_i}\right)^{w_i}\prod_{j=1}^{m}t_j^{a_{ij}w_i} \tag{13}$$

従って、目的関数 *f(t)*が最小かつ定数になるのは、以下の条件が成立するときである。

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}w_i=0(j=1,...,m) \tag{14}$$

$$w_1+w_2+\cdots+w_m=1 \tag{15}$$

$$最小値=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{C_i}{w_i}\right)^{w_i} \tag{16}$$

$\frac{C_i}{w_i}\prod_{j=1}^{m}t_j^{a_{ij}}$ = (i に無関係の一定値)

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{C_i}{w_i}\right)^{w_i}=目的関数の最小値 \tag{17}$$

3. 制約ありでの一般論(幾何計画法)

［例題３：2 変数 1 制約］

目的関数：$f(x,y)=x+y$→最小化

制約条件：$g(x,y)=x^2y=1$ (18)

$(x>0,y>0)$

[例題３の解]

*f(x,y)*と *g(x,y)*のλ乗を以下に示すように相乗する。

$$f(x,y)\cdot g(x,y)^{\lambda}=(x+y)x^{2\lambda}y^{\lambda} \tag{19}$$

$g(x,y)=1$ なので、次式が成立する。

$$f(x,y)=f(x,y)\cdot g(x,y)$$

$$=(x+y)x^{2\lambda}y^{\lambda} \tag{20}$$

(20)式の右辺第 1 項(x＋y)に対して重み付き (w_1,w_2) 算術幾何不等式を適用する。

$$(x+y)x^{2\lambda}y^{\lambda}=\left(w_1\left(\frac{x}{w_1}\right)+w_2\left(\frac{y}{w_2}\right)\right)x^{2\lambda}y^{\lambda}$$

$$\geq\left(\frac{x}{w_1}\right)^{w_1}\left(\frac{y}{w_2}\right)^{w_2}x^{2\lambda}y^{\lambda}$$

$$=\left(\frac{1}{w_1}\right)^{w_1}\left(\frac{1}{w_2}\right)^{w_2}x^{w_1+2\lambda}y^{w_2+\lambda} \tag{21}$$

式(20)と式(21)より、$w_1+2\lambda=0,w_2+\lambda=0$ の時 $(w_1+w_2=1)$ に、目的関数は定数項となり、その時、以下の式が成立する。

$$w_1=\frac{2}{3},w_2=\frac{1}{3},\lambda=-\frac{1}{3} \tag{22}$$

$$\frac{x}{w_1}=\frac{y}{w_2} \tag{23}$$

$$f_{\min}=\left(\frac{1}{w_1}\right)^{w_1}\left(\frac{1}{w_2}\right)^{w_2} \tag{24}$$

$$x=w_1f_{\min},y=w_2f_{\min} \tag{25}$$

解：$\boxed{f_{\min}=3\cdot2^{-\frac{2}{3}},x=2^{\frac{1}{3}},y=2^{-\frac{2}{3}}}$

例題３で示した方法（ラグランジュ未定乗数法の乗法版）をより一般的な制約あり幾何計画問題の解に適用する。 その前に、制約式 g(t)=1 のλ乗「$g(t)^{\lambda}=1$」に算術幾何不等式を適用した結果を整理する。

$$g(t)=\sum_{i=1}^{n}d_i\prod_{j=1}^{m}t_j^{b_{ij}} \tag{26}$$

この g(t)に、重み和 $\sum w_i=\lambda>0$、重み $(w_1,w_2,..,w_n)$ 付き算術幾何不等式を適用する。

$$g(t)=\sum_{i=1}^{n}d_i\prod_{j=1}^{m}t_j^{b_{ij}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{\lambda}\left(d_i\prod_{j=1}^{m}\left(w_i^{-1}t_j^{b_{ij}}\right)\right)\times\lambda$$

$$\geq \prod_{i=1}^{n}\left(d_i \prod_{j=1}^{m}\left(w_i^{-1} t_j^{b_{ij}} \right) \right)^{\frac{w_i}{\lambda}} \times \lambda$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d_i}{w_i} \right)^{\frac{w_i}{\lambda}} \prod_{j=1}^{m} t_j^{\frac{b_{ij}w_i}{\lambda}} \right] \times \lambda$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d_i}{w_i} \right)^{\frac{w_i}{\lambda}} \cdot \prod_{j=1}^{m} t_j^{\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{ij}w_i}{\lambda}} \right] \times \lambda \qquad (27)$$

すなわち、次式(28)を得る。

$$g(t) \geq \left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d_i}{w_i} \right)^{\frac{w_i}{\lambda}} \cdot \prod_{j=1}^{m} t_j^{\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{ij}w_i}{\lambda}} \right] \times \lambda \qquad (28)$$

ところで、制約式は $g(t)=1$ なので、(28)式の両辺を λ 乗すると(29)を得る。

$$g(t)^{\lambda} \geq \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d_i}{w_i} \right)^{w_i} \cdot \prod_{j=1}^{m} t_j^{\sum_{i=1}^{n} b_{ij}w_i} \cdot \lambda^{\lambda} \qquad (29)$$

［例題４：m 変数 n 項 s 制約］

目的関数: $f(t) = \sum_{i=1}^{n} U_i(t)$ →最小化 (30)

但し、 $U_i(t) = C_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}}$ (31)

制約条件: $g_k(t) = \sum_{i=1}^{n} V_{ik}(t) = 1 (k = 1,\ldots,s)$ (32)

但し、 $V_{ik} = D_{ik} \prod_{j=1}^{m} t_j^{b_{ijk}}$ (33)

$(t_j > 0, j = 1,\ldots,m)$

［例題４の解］数式表現の簡略化と統一化をかねて、目的関数$f(t)$を$g_0(t)$とする。

$$g_o(t) = f(t) = \sum_{i=1}^{n} V_{i0}(t) \qquad (34)$$

$$V_{i0} = D_{io} \prod_{j=1}^{m} t_j^{b_{ij0}} \qquad (35)$$

すなわち、添え字 k=0 を目的関数とする。

又、$U_i = V_{i0}, C_i = D_{i0}, a_{ij} = b_{ijo}$ である。

(29)式に添え字 k をつけた関数 $g_k(t)$ で表現する。

$$g_k(t)^{\lambda_k} \geq \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{D_{ik}}{w_{ik}} \right)^{w_{ik}} \cdot \prod_{j=1}^{m} t_j^{\sum_{i=1}^{n} b_{ijk}w_{ik}} \cdot \lambda_k^{\lambda_k} \qquad (36)$$

$g_k(t) = 1$ (k=1,…,s)である点に注意すると、次式(37)が成立する(但し、$\lambda_0 = 1$)。

$$f(t) = g_0(t) = g_0(t)^{\lambda_0} g_1(t)^{\lambda_1} g_2(t)^{\lambda_2} \cdots g_s(t)^{\lambda_s}$$

$$= \prod_{k=0}^{s} g_k(t)^{\lambda_k} \qquad (37)$$

(37)式右辺に、(36)式を代入すると、以下の不等式(38)を得る。

$$f(t) = \prod_{k=0}^{s} g_k(t)^{\lambda_k}$$

$$\geq \prod_{k=0}^{s}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{D_{ik}}{w_{ik}} \right)^{w_{ik}} \cdot \prod_{j=1}^{m} t_j^{\sum_{i=1}^{n} b_{ijk}w_{ik}} \cdot \lambda_k^{\lambda_k} \right) \qquad (38)$$

従って、目的関数 f(t)が最小(定数)となるのは以下の条件が成立する時であり、そのときに限る。

$$\sum_{k=0}^{s}\sum_{i=1}^{n} b_{ijk} w_{ik} = 0 \qquad (j=1,\ldots,m) \qquad (39)$$

$$f_{\min} = \prod_{k=0}^{s}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{D_{ik}}{w_{ik}} \right)^{w_{ik}} \cdot \lambda_k^{\lambda_k} \qquad (40)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_{ik} = \lambda_k \ (\mathrm{k}=1,\ldots,\mathrm{s}) \qquad (41)$$

但し、$\lambda_0 = 1$、すなわち、$\sum_{i=1}^{n} w_{i0} = 1$ (42)

次に、4 変数 2 制約の具体的問題を解く。

［例題５：m=4、s=2］

目的関数：$f(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1^3 t_2^2$ (43)

制約条件：$g_1 = \frac{1}{t_1 t_3} + \frac{t_4}{t_1} = 1$ (44)

$$g_2 = \frac{t_3}{t_2} + \frac{1}{t_2 t_4^2} = 1 \qquad (45)$$

$(t_j > 0, j = 1,2,3,4)$

［例題５の解］

この例では、m=4,s=2,項目数 n=2 であるが、この項

目数 n は $g_k(t)(k=0,1,...,s)$ での最大項目数と設定すれば、例題4一般論での形式議論は事足りる。しかし、$g_k(t)$ に依存して、項目数が異なりうるので、実質的には項目数 n はあまり意味を持たない。

$$f(t_1,t_2,t_3,t_4)=g_0\cdot g_1^{\lambda_1}\cdot g_2^{\lambda_2}$$

$$=t_1^3t_2^2\cdot\left(\frac{1}{t_1t_3}+\frac{t_4}{t_1}\right)^{\lambda_1}\cdot\left(\frac{t_3}{t_2}+\frac{1}{t_2t_4^2}\right)^{\lambda_2}$$

$$=t_1^3t_2^2\cdot\left(w_{11}\left(\frac{1}{w_{11}t_1t_3}\right)+w_{21}\left(\frac{t_4}{w_{21}t_1}\right)\right)^{\lambda_1}$$

$$\left(w_{12}\left(\frac{t_3}{w_{12}t_2}\right)+w_{22}\left(\frac{1}{w_{22}t_2t_4^2}\right)\right)^{\lambda_2}$$

$$\geq\left(\frac{1}{w_{11}}\right)^{w_{11}}\left(\frac{1}{w_{21}}\right)^{w_{21}}$$

$$\left(\frac{1}{w_{12}}\right)^{w_{12}}\left(\frac{1}{w_{22}}\right)^{w_{22}} \tag{46}$$

$$\times\ t_1^{3-w_{11}-w_{21}}\ \times\ t_2^{2-w_{12}-w_{22}}$$

$$\times\ t_3^{-w_{11}+w_{12}}\ \times\ t_4^{w_{21}-2w_{22}}\ \times\ \lambda_1^{\lambda_1}\lambda_2^{\lambda_2}$$

従って、目的関数 f が最小値(定数)となるのは以下の時である。

$$w_{11}+w_{21}=\lambda_1 \tag{47}$$

$$w_{12}+w_{22}=\lambda_2 \tag{48}$$

$$3-w_{11}-w_{21}=0 \tag{49}$$

$$2-w_{12}-w_{22}=0 \tag{50}$$

$$-w_{11}+w_{12}=0 \tag{51}$$

$$w_{21}-2w_{22}=0 \tag{52}$$

6変数6制約の線形連立方程式を解くと、以下を得る。

$$w_{11}=1,w_{21}=2,w_{12}=1,w_{22}=1 \tag{53}$$

$$\lambda_1=3,\lambda_2=2 \tag{54}$$

$$f_{\min}=1^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot1^1\cdot1^1\cdot3^3\cdot2^2=27 \tag{55}$$

$$U_i=f_{\min}w_i(w_i=1)\text{より、}\ t_1^3t_2^2=27 \tag{56}$$

$$V_{ik}={w_{ik}}\big/{\lambda_k}\ \text{より}\ \frac{1}{t_1t_3}=\frac{1}{3} \tag{57}$$

$$\frac{t_4}{t_1}=\frac{2}{3}\quad(58)\qquad\frac{t_3}{t_2}=\frac{1}{2}\quad(59)\qquad\frac{1}{t_2t_4^2}=\frac{1}{2}\quad(60)$$

(56)～(60)より、以下を得る。

$$t_1=\frac{3}{4},t_2=8,t_3=4,t_4=\frac{1}{2} \tag{61}$$

4. おわりに

(その1)～(その4)を通して、一般化平均不等式計画法を提案し，例題を通して様々な計画法の可能性を検討した。

幾何計画法は算術幾何不等式を利用したことが名前の由来になっているが、初期の応用分野は工業製品、機械設計などの幾何学形状にも関連したインダストリアル・メカニカルデザインであった。数理計画法の中でも、最も「生産工学的」であり、Kuhn-Tucker条件など数理計画理論の本流から少し離れた分野に位置づけられていた。理論体系が特殊であり、かつ、本流の理論からは、ラグランジュ未定乗数法/凸計画法などの一部分として扱えるため、現在ではほとんど研究論文は見当たらない。しかしながら、「幾何計画法」は、(ⅰ)「物作り」に直接立脚した手法である点、(ⅱ)算術幾何不等式に基づく職人芸的な独自の理論展開を行うため、得られた設計結果が最適化プロセスの理由付けを明示できる点、(ⅲ)最適化問題を定式化しさえすれば、汎用最適化ソフトを利用して解を得るという従来アプローチと異なり、最適化において数理モデルによる考察･分析･検討･計算が可能である点、さらに、(ⅳ)一般化平均不等式を用いて一般化することにより適用範囲が拡大する点、などの利点もあり、今後の発展が期待できると思う。

なお、２章、３章に示した制約無/有・幾何計画法の一般論において、連立方程式が不定でも、不能でもなく、正常に解ける場合を例題で扱ったが、それ以外の場合の最適化については今後の課題である。