7-43

一般化平均と最適化

(その 2)調和計画法

日大生産工　○篠原　正明

情報システム研究所　篠原　健

１．はじめに

(その１)では、算術幾何不等式を最適化に適用した結果として、幾何計画法(Geometric Programming)なる数理計画法の１クラスが誕生することを説明した。算術幾何平均不等式は、一般化平均 $G(p;X_n)$ の $p=0$ と $p=1$ の間の 1 つの大小関係式に過ぎず、これ以外にも莫大な大小関係式が存在し、いずれも何らかの最適化処理計算を導出することが可能である。本論文(その２)においては、調和平均に関連した不等式から導出される一連の最適化プロセスを調和計画法(Harmonic Programming)と名付け、例題を通して調和計画法の理論と応用を説明する。

２．調和平均と関係する不等式

２つの正データ値 x, y に対する調和平均は、次式(1)で与えられる。

$$\frac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}} \tag{1}$$

重み (w_1, w_2) を考慮した調和平均は(2)式で与えられる($w_1+w_2=1$)。

$$\frac{1}{w_1x^{-1}+w_2y^{-1}} \tag{2}$$

(1) 式、(2)式を n 個の正値のデータ集合 $X_n=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ に一般化すると、

(3)、(4)となる($\sum w_i=1$)。

$$n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\right)^{-1} \tag{3}$$

$$\left(\sum w_ix_i^{-1}\right)^{-1} \tag{4}$$

調和平均は一般化平均 $G(p;x_n)$ において、$p=-1$ に相当するので、調和平均≤幾何平均、調和平均≤算術平均、調和平均≤２乗算術平均などの大小関係が成立する。

ここで、2 乗算術平均は、$G(p;x_n)$ で $p=2$ とした平均である。

以下に各不等式を数式表現する。

・調和平均≤幾何平均

$$\frac{2}{x^{-1}+y^{-1}} \le \sqrt{xy} \tag{5}$$

$$\frac{1}{w_1x^{-1}+w_2y^{-1}} \le x^{w_1}y^{w_2} \tag{6}$$

Generalized Mean Inequality and Optimization

－Part Ⅱ： Harmonic Programming－

Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

・調和平均≤算術平均

$$\frac{2}{x^{-1}+y^{-1}} \leq \frac{1}{2}(x+y) \tag{7}$$

$$\frac{1}{w_1 x^{-1}+w_2 y^{-1}} \leq w_1 x + w_2 y \tag{8}$$

・調和平均≤2 乗算術平均

$$\frac{2}{x^{-1}+y^{-1}} \leq \left(\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

$$\frac{1}{w_1 x^{-1}+w_2 y^{-1}} \leq \sqrt{w_1 x^2 + w_2 y^2} \tag{10}$$

$$\frac{1}{\left(w_1 x^{-1}+w_2 y^{-1}\right)^2} \leq w_1 x^2 + w_2 y^2 \tag{11}$$

3．調和計画法の例

前節において、調和平均に関連した 3 つの不等式を説明したが､それらの不等式と直接関係する最適化問題の例を以下に示す。

[例題 1：調和平均≤算術平均]

目的関数： $f(x,y)=2x+y \rightarrow$最小化

制約条件： $x^{-1}+y^{-1}=1$ (12)

$$(x>0, y>0)$$

[例題 1 の解]

目的関数 $f(x,y)$ に対して重み付け (w_1, w_2) 不等式(8)を適用する。

$$f(x,y)=2x+y$$

$$= w_1\left(\frac{2x}{w_1}\right)+w_2\left(\frac{y}{w_2}\right)$$

$$\geq \frac{1}{w_1\left(\frac{w_1}{2x}\right)+w_2\left(\frac{w_2}{y}\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{w_1^2}{2}\left(\frac{1}{x}\right)+w_2^2\left(\frac{1}{y}\right)} \tag{13}$$

制約条件 $x^{-1}+y^{-1}=1$ (12)式を代入するためには、(13)式において、

$$w_1^2/2 : w_2^2 = 1:1 \tag{14}$$

が成立すれば良い。(14)と $w_1+w_2=1$ と $w_1>0, w_2>0$ より、

$$w_1=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}, w_2=\frac{1}{1+\sqrt{2}} \tag{15}$$

を得る。

(13)の右辺項は以下の通りとなる。

$$\frac{1}{\frac{w_1^2}{2}\left(\frac{1}{x}\right)+w_2^2\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 \tag{16}$$

従って、目的関数 $f(x,y)$ は(16)式の最小値 $\left(1+\sqrt{2}\right)^2$ をとり、それは $\frac{2x}{w_1}=\frac{y}{w_2}$ の時である。

即ち $x=(1+\sqrt{2})/\sqrt{2}, y=1+\sqrt{2}$ となる。

解： $f_{\min}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2, x=(1+\sqrt{2})/\sqrt{2}, y=1+\sqrt{2}$

[例題 2：調和平均≦幾何平均]

目的関数： $f(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$→最小化

制約条件： $xy^2=1$ (17)

$(x>0, y>0)$

[例題 2 の解]

調和平均≦幾何平均の(5)式、(6)式を変形表示すると以下の通りである。

$$x^{-1}+y^{-1}\geq\frac{2}{\sqrt{xy}} \tag{18}$$

$$w_1x^{-1}+w_2y^{-1}\geq\frac{1}{x^{w_1}y^{w_2}} \tag{19}$$

目的関数 $f(x,y)$ に重み付け (w_1,w_2) 不等式(19)を適用する。

$$f(x,y)=x^{-1}+y^{-1}$$

$$=w_1\left(\frac{1}{w_1x}\right)+w_2\left(\frac{1}{w_2y}\right)$$

$$\geq\frac{1}{(w_1x)^{w_1}\cdot(w_2y)^{w_2}}$$

$$=\frac{1}{w_1^{w_1}\cdot w_2^{w_2}\cdot x^{w_1}\cdot y^{w_2}} \tag{20}$$

$w_1:w_2=1:2$ とすれば、制約条件 $xy^2=1$(17)式を代入することにより、(20)式の右辺項を定数化できる。

$w_1:w_2=1:2, w_1+w_2=1$ より、

$w_1=1/3, w_2=2/3$ を得る。

従って、目的関数 $f(x,y)$ は $w_1x=w_2y$ の時に(かつ、その時に限って)、(21)式の最小値を取る。

$$\frac{1}{w_1^{w_1}\cdot w_2^{w_2}\cdot x^{w_1}\cdot y^{w_2}}=\frac{3\cdot2^{-\frac{2}{3}}}{(xy^2)^{\frac{1}{3}}}=3\cdot2^{-\frac{2}{3}} \tag{21}$$

その時の x,y は、$w_1x=w_2y$、$xy^2=1$、$x>0,y>0$ より、

$x=2^{\frac{2}{3}}, y=2^{-\frac{1}{3}}$ となる。

$\boxed{\text{解：}\ f_{\min}=3\cdot2^{-\frac{2}{3}}, x=2^{\frac{2}{3}}, y=2^{-\frac{1}{3}}}$

[例題 3：調和平均≦2 乗算術平均]

目的関数： $f(x,y)=2x^2+y^2$→最小化

制約条件： $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$ (22)

$(x>0, y>0)$

[例題 3 の解]

目的関数 $f(x,y)$ に対して、(11)式「調和平均≦2 乗算術平均」の不等式を適用する。

$$f(x,y)=2x^2+y^2$$

$$=w_1\left(\frac{2x^2}{w_1}\right)+w_2\left(\frac{y^2}{w_2}\right)$$

$$\geq\frac{1}{\left(w_1\left(\frac{\sqrt{w_1}}{\sqrt{2}x}\right)+w_2\left(\frac{\sqrt{w_2}}{y}\right)\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\left((2^{-\frac{1}{2}}w_1^{\frac{3}{2}})\frac{1}{x}+w_2^{\frac{3}{2}}\frac{1}{y}\right)^2} \tag{23}$$

(23)式の右辺において、

$2^{-\frac{1}{2}}w_1^{\frac{3}{2}}:w_2^{\frac{3}{2}}=1:1$(24)となれば、右辺項は定数化できる。

(24)式と $w_1+w_2=1$ と $w_1>0, w_2>0$ より、

$$w_1=\frac{2^{\frac{1}{3}}}{1+2^{\frac{1}{3}}}, w_2=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{3}}} \tag{25}$$

を得る。すると、(23)式の右辺項は以下となる。

$$
(23)\text{式の右辺} = \frac{1}{\left((2^{-\frac{1}{2}} w_1^{\frac{3}{2}})\frac{1}{x} + w_2^{\frac{3}{2}}\frac{1}{y}\right)^2}
$$

$$
= \frac{1}{w_2^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2}
$$

$$
= \left(1+2^{\frac{1}{3}}\right)^3 \tag{26}
$$

従って、目的関数 $f(x,y)$ は、$\dfrac{2x^2}{w_1} = \dfrac{y^2}{w_2}$ の時に(かつ、その時に限って)(26)式の最小値をとる。

その時の x, y は、

$\dfrac{2x^2}{w_1} = \dfrac{y^2}{w_2}, \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = 1, x>0, y>0$ より、

$x = 1+2^{-\frac{1}{3}}, y = 1+2^{\frac{1}{3}}$ となる。

$$
\boxed{\text{解：}\ f_{\min} = \left(1+2^{\frac{1}{3}}\right)^3, x = 1+2^{-\frac{1}{3}}, y = 1+2^{\frac{1}{3}}}
$$

[例題 4：3 変数で調和平均≤算術平均]

目的関数：$f(x,y,z) = x+4y+9z$ → 最小化 (27)

制約条件：$x^{-1}+y^{-1}+z^{-1} = 1$ (28)

$(x>0, y>0, z>0)$

[例題 4 の解]

目的関数(27)に対して重み付け (w_1, w_2, w_3) 不等式を適用する。

$$
w_1\left(\frac{x}{w_1}\right)+w_2\left(\frac{4y}{w_2}\right)+w_3\left(\frac{9z}{w_3}\right) \geq \frac{1}{w_1\left(\frac{w_1}{x}\right)+w_2\left(\frac{w_2}{4y}\right)+w_3\left(\frac{w_3}{9z}\right)}
$$

$$
= \frac{1}{\frac{w_1^2}{x}+\frac{w_2^2}{4y}+\frac{w_3^2}{9z}} \tag{29}
$$

$w_1^2 : \dfrac{w_2^{w_2}}{4} : \dfrac{w_3^{w_2}}{9} = 1:1:1$ と $w_1+w_2+w_3 = 1$ より、

$w_1 = \dfrac{1}{6}, w_2 = \dfrac{1}{3}, w_3 = \dfrac{1}{2}$ を得る。

$$
(29)\text{式の右辺項} = \frac{1}{w_1^2(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})} = 36 \tag{30}
$$

$$
\boxed{\text{解：}\ f_{\min} = 36, x = 6, y = 3, z = 2}
$$

4. おわりに

一般化平均に関する不等式の中でも、調和平均に注目して調和平均に関係する不等式に基づく最適化を考察した。重み付け (w_1, w_2) 平均化操作を用いることにより、「定数項になる」、「制約条件式が代入できる」などの条件に合致するように重み (w_1, w_2) を変化させる自由度を利用した。その点は、「(その 1)幾何計画法」の枠組みを同じである。「(その 1)幾何計画法)」では、幾何平均≦算術平均不等式のみを用いたが、「(その２)調和計画法」では、調和平均≦幾何平均、調和平均≦算術平均、調和平均≦2 乗算術平均、など調和平均にかかわる多様な大小関係不等式を用いた。