

一般化平均と最適化

(その1) 幾何計画法

日大生産工 ○ 篠原 正明
情報システム研究所 篠原 健

1. はじめに

幾何計画法(Geometric Programming)とは、「幾何平均 $\leq$ 算術平均」不等式に基づき最適化を行う非線形計画法のクラスの1つであるが、最近の数理計画法の成書では幾何計画法を解説したものは皆無に近い。

著者の学生時代の約40年前頃(1960年代後半)には、幾何計画法を扱った成書もあったし、大学の授業でも講義がなされていた...と記憶する。

幾何計画法の最適化プロセスは、その他の非線形計画法の理論や方法論と異なり、数学的理論を積み上げることにより解が得られ、かつ、適用される最適化問題が現実の工業設計などのデザインと密接に関係するなどの特徴を持っていた。

しかしながら、理論と応用の両面において汎用性に欠けるという短所があったためか、幾何計画法は、その後の最適化の潮流「現実の問題を定式化し、汎用の最適化ソフトにより最適解を求める」からはずれ、飛躍することとはなかったのである(特に、日本では)。幾何計画法の誕生・発展・現状についての説明については、[1]を参照してください。

本シリーズ「一般化平均と最適化」においては、幾何計画法が算術・幾何不等式に基づく最適化である点に注目し、算術平均・幾何平均を含み、更にパラメタ p により一般化した平均値概念である「一般化平均」を利用し

た最適化アプローチを考案する。即ち、幾何計画法以外にも、調和計画法、更には (p, q) 計画法などの非線形計画法の枠組みを提案する。

2. 一般化平均

n 個の正値データ $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($x_i > 0, i=1, \dots, n$) に対する p 次一般化平均 $G(p; X_n)$ は(1)式で定義される。

$$G(p; X_n) = \left[\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

以下の漸化式も成立する。

$$G(p; X_{n+1}) = \left(\frac{n}{n+1} G(p; X_n)^p + \frac{1}{n+1} x_{n+1}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2)$$

但し、 $X_{n+1} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ 。

ここで、 $G(p; X_n)$ は $p=1$ で算術平均、 $p=-1$ で調和平均、 $p \rightarrow 0$ で幾何平均に帰着する。ここで、 $G(p; X_n)$ は p について増加関数である。即ち、「 $p_1 < p_2$ ならば $G(p_1; X_n) \leq G(p_2; X_n)$ 」である。例えば、 $p_1=0, p_2=1$ とすれば「幾何平均 $\leq$ 算術平均」不等式となる。

又、等号が成立するのは、「 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n$ 」の場合に限る。

3. 算術幾何不等式と幾何計画法

2 データの単純な算術幾何不等式は(3)であり、 n データで正重み $\sum w_i = 1$ と一般化すると(4)となる。

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{w_i} \quad (4)$$

但し、 $x_i > 0, w_i > 0$ ($i=1, \dots, n$)。

(3),(4)において、等号が成立するのは、(3)では「 $x_1 = x_2$ 」、(4)では「 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 」の時であり、その時のみである。即ち、「 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 」は不等式において等号が成立するための必要十分条件である。

以下に簡単な例題を通して、算術幾何不等式を用いることにより、非線形計画問題のある種のクラス(幾何計画問題)が解けることを示す。

[例題 1 : 制約無し]

目的関数： $f(x) = x + \frac{1}{x} \rightarrow$ 最小化

(制約： $x > 0$)

[例題 1 の解]

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)} = 2 \quad (5)$$

但し、(3)において、 $x_1 = x, x_2 = 1/x$ と置けば、不等式(5)を得る。不等式(5)の意味するところは...目的関数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ は 2 以上の値をとる、 $x_1 = x_2$ の時に限って最小値 2 を取る。

従って、 $f(x)$ の最小値 = 2 で、それは $x_1 = x_2$ の時、($x = 1/x$)、即ち、 $x = 1$ ($x = -1$ は暗黙の了解 $x > 0$ に反する)の時である。

解： $f_{\min} = 2$, $x = 1$

[例題 2 : 制約有り]

目的関数： $f(x, y) = x + y \rightarrow$ 最小化

制約条件： $xy = 1$ (6)

($x > 0, y > 0$)

[例題 2 の解]

$$f(x, y) = x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2 \quad (7)$$

(3)において、 $x_1 = x, x_2 = y$ と置き、更に制約条件(6)に代入すれば、不等式(7)を得る。不等式(7)の意味するところは...目的関数 $f(x, y) = x + y$ は 2 以上の値をとる $x_1 = x_2$ の時に限って、最小値 2 を取る。従って、 $f(x, y)$ の最小値=2 でそれは $x_1 = x_2$ の時、即ち、 $x = y = 1$ の時である。

解： $f_{\min} = 2$, $x = 1$, $y = 1$

[例題 3 : 制約無し/重み付け要]

目的関数： $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} \rightarrow$ 最小化

(制約： $x > 0$)

[例題 3 の解]

$x_1 = x^2, x_2 = \frac{1}{x}$ と置いて、(3)式を適用すると、次式(8)を得る。

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x}} = 2\sqrt{x} \quad (8)$$

これは、妥当な不等式であるが、 $f(x)$ に関する下限について情報を与えない。右辺が定数であることが望まれる。データ数= 2 の算術

幾何不等式は(3)以外にも、(4)の $n = 2$ が存在する。即ち、重み付け不等式(9)式である。

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 \geq x_1^{w_1} \cdot x_2^{w_2} \quad (9)$$

$$(w_1 + w_2 = 1, w_1 > 0, w_2 > 0)$$

重み付け(w_1, w_2)不等式を用いると、次式(10)を得る。

$$f(x) = w_1 \left(\frac{x^2}{w_1} \right) + w_2 \left(\frac{x^{-1}}{w_2} \right) \geq \left(\frac{x^2}{w_1} \right)^{w_1} \cdot \left(\frac{x^{-1}}{w_2} \right)^{w_2} \quad (10)$$

(10)式の右边を整理すると、(11)となる。

$$(10) \text{式右辺項} = \frac{x^{2w_1 - w_2}}{w_1^{w_1} w_2^{w_2}} \quad (11)$$

ここで、 $2w_1 - w_2 = 0$ とすれば、(10)式右辺項は定数となり、更に本来の正規化条件 $w_1 + w_2 = 1$ より、 $w_1 = 1/3, w_2 = 2/3$ となる。改めて、(10)式は以下の通りとなる。

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x} \geq w_1^{-w_1} \cdot w_2^{-w_2} \quad (12)$$

ここで、等号が成立するのは、(10)式において、 $\frac{x^2}{w_1} = \frac{x^{-1}}{w_2}$ の時である。従って、 $f(x)$ の最

小値は $w_1^{-w_1} \cdot w_2^{-w_2} = 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}}$ で、 $x = \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$

の時である。

解： $f_{\min} = 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}}, x = 2^{\frac{1}{3}}$

この例題 3 では、重み付け(w_1, w_2)算術幾何不

等式を適用することにより、最適化のプロセスが成立できた。重み付けベクトル(w_1, w_2)は任意であり、自由度が残されているが、右辺項が定数値になるように定めると、好都合である。

[例題 4：制約有り/重み付け要]

目的関数： $f(x, y) = x + y \rightarrow$ 最小化

制約条件： $x^2 y = 1$ (13)

$$(x > 0, y > 0)$$

[例題 4 の解]

算術幾何不等式(3)を直接適用しても、上手くいかない。そこで、例題 3 と同様に重み付け(w_1, w_2)算術幾何不等式(9)を適用する。

$$f(x, y) = w_1 \left(\frac{x}{w_1} \right) + w_2 \left(\frac{y}{w_2} \right) \geq \left(\frac{x}{w_1} \right)^{w_1} \cdot \left(\frac{y}{w_2} \right)^{w_2} \quad (14)$$

(14)式の右边を整理すると、(15)となる。

$$(14) \text{式右辺項} = \frac{x^{w_1} \cdot y^{w_2}}{w_1^{w_1} \cdot w_2^{w_2}} \quad (15)$$

(15)において、 $w_1 : w_2 = 2 : 1$ ならば、制約条件(13)式「 $x^2 y = 1$ 」を代入して、(14)式右辺項を定数化できる。正規化条件 $w_1 + w_2 = 1$ より、 $w_1 = 2/3, w_2 = 1/3$ となる。

改めて(14)式は以下の通りとなる。

$$f(x, y) = x + y \geq \frac{(x^2 y)^{\frac{1}{3}}}{w_1^{w_1} \cdot w_2^{w_2}} = w_1^{-w_1} \cdot w_2^{-w_2} \quad (16)$$

ここで、等号が成立するのは、(14)式において $\frac{x}{w_1} = \frac{y}{w_2}$ の時である。従って $f(x, y)$ の最小

値は $w_1^{-w_1} \cdot w_2^{-w_2} = 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}}$ で、 $x = 2^{\frac{1}{3}}, y = 2^{-\frac{2}{3}}$ の時である。

$$\text{解： } f_{\min} = 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}}, x = 2^{\frac{1}{3}}, y = 2^{-\frac{2}{3}}$$

[例題 5 : 3 変数/制約有り/重み付け要]

目的関数: $f(x, y, z) = xy + yz + zx \rightarrow \text{最小化}$ (17)

制約条件: $x^3 y^4 z^5 = 1$ (18)
 $(x > 0, y > 0, z > 0)$

[例題 5 の解]

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xy + yz + zx \\ &= w_1 \left(\frac{xy}{w_1} \right) + w_2 \left(\frac{yz}{w_2} \right) + w_3 \left(\frac{zx}{w_3} \right) \\ &\geq \left(\frac{xy}{w_1} \right)^{w_1} + \left(\frac{yz}{w_2} \right)^{w_2} + \left(\frac{zx}{w_3} \right)^{w_3} \\ &= \frac{x^{w_1+w_3} \cdot y^{w_1+w_2} \cdot z^{w_2+w_3}}{w_1^{w_1} \cdot w_2^{w_2} \cdot w_3^{w_3}} \end{aligned} \quad (19)$$

$$w_1 + w_3 : w_1 + w_2 : w_2 + w_3 = 3 : 4 : 5$$

ならびに $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ より、

$$w_1 = \frac{1}{6}, w_2 = \frac{1}{2}, w_3 = \frac{1}{3} \text{ を得る。}$$

$$\begin{aligned} (19)\text{式の右辺項} &= \frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \cdot z^{\frac{5}{6}}}{\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{(x^3 y^4 z^5)^{\frac{1}{6}}}{\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}} \\ &= 2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (20)$$

$$6xy = 2yz = 3zx \text{ と } x^3 y^4 z^5 = 1 \text{ より、 } x = 2^{\frac{1}{3}} 3^{-\frac{3}{4}},$$

$$y = 2^{-\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{4}}, z = 2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{4}} \text{ となる。}$$

$$\begin{aligned} \text{解： } f_{\min} &= 2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{2}}, x = 2^{\frac{1}{3}} 3^{-\frac{3}{4}}, y = 2^{-\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{4}} \\ z &= 2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

4. おわりに

幾何計画問題の簡単な例題について、重み付き (w_1, w_2) 算術幾何不等式を適用することにより、最適化処理が可能なことを示した。

算術幾何不等式以外の一般化平均の不等式を利用して、(その 1) で説明したような最適化が可能であることを数多くの不等式に対して (その 2) 以降で提案するが、(その 1) での説明はそのための準備である。さらに、(その 4) では、より一般的な問題形式に算術幾何不等式を適用し、一般論を論じる。

参考文献

- [1] 森村英典・刀根薫・伊理正夫監訳：経営科学OR用語大事典、朝倉書店 (1999)。
- [2] 篠原正明・篠原健：一般化平均概要の一般化、第 40 回日本大学生産工学部 学術講演会 数理情報部会 講演概要、pp.55-56(2007.12)。