7-35

ナンバープレイスにおけるスキャニングを解くホップフィールドネットワークの設計

日大生産工(院)　○江見大成
日大生産　　　松田　聖

1 はじめに

ホップフィールドネットワークを用いた組み合わせ最適化問題の求解が多く試されている中、筆者らは、人間の知的活動はすべて最適化過程であるとの仮定に基づき、すでに代表的な人間の知的活動である意志決定のホップフィールドモデルを提案している[1]。また、パズルを解くことを最適化過程と見なし、数独を解法可能なホップフィールドモデルを示している[2]。その過程で、ホップフィールドネットワークが数独を解法する際、人間が使用するテクニックを同様に使用している可能性を示唆した。人間の知的活動がすべて最適化過程であるならば、解法をする際のテクニックも最適化過程の一部であると考えられる。そこで、数独を例として、問題解法におけるテクニックを再現するニューラルネットワークを設計する中で、人間が用いるテクニックが、最適化過程におけるどのような情報処理なのかについて研究する。

2 数独の解法

			9	1	8			
		3				2		
	5	6				1	4	
3			2		9			7
4				8				5
7			3	5	4			2
	1	4		9		7	5	
				7				
		8	6	3	1	9		

図. 1

2	4	7	9	1	8	5	3	6
1	9	3	5	4	6	2	7	8
8	5	6	7	2	3	1	4	9
3	8	5	2	6	9	4	1	7
4	2	9	1	8	7	3	6	5
7	6	1	3	5	4	8	9	2
6	1	4	8	9	2	7	5	3
9	3	2	4	7	5	6	8	1
5	7	8	6	3	1	9	2	4

図. 2

例題として図.1を示す。数独は9×9のマスから構成され、あらかじめいくつかのマスには数字が入っている。数独の目的は、行、列、太線で囲まれた3×3の範囲（ブロック）のすべてのマスに1～9の数字を入れることである。図. 1は以下のように解くことができる。

始めに、例えば左上のブロックに注目する。このブロックでは1がまだ出現していないため、6個の空白のどこかに入るはずである。ここで、1, 3行目と2列目を見ると、既に1がある。行、列、ブロックに1～9の数字を入れる必要があるため、必然的に、行、列、ブロック内での数字の重複はあり得ない。よって左上のブロックで1を入れることが出来るのは2行1列目のマスとなる。次に、5列目に注目する。この列には3つの空白があり、まだ出現していない、2，4，6が入る。ここで3行5列目のマスを見ると、この行には既に4，6があるため、このマスには2が入る。このような、同じ行、列、ブロックの範囲にある数字から判断して空白の数字を入れる手法を『スキャニング』と呼ぶ。スキャニングを使うことで、図. 1を解き、図. 2を得ることができる。

Solving Sudoku Puzzle with Scanning Technique
Used by Hopfield Network

Taisei EMI and Satoshi MATSUDA

本研究では数独を解く際に必要不可欠なこのスキャニングを再現するホップフィールドネットワークを設計する中で、このテクニックがどの様な情報処理なのかを解明していく。

3 数独における最適化

問題の表現を9×9×9の計729個のボックスが並ぶ立方体として捉える。また、一つのボックスを$v_{xyz} \in [0,1]$とする。$v_{xyz} = 1$とは、数独のマス(x,y)にz(1～9)の数字が入ることを意味する。立方体で表現した数独のxy平面における制約式は以下の非同次連立729元ブール代数方程式で表すことが出来る。

$$\begin{pmatrix} 111111111000000000000000000...0 \\ 000000000111111111000000000...0 \\ 0000000000000000001111111110...0 \\ \vdots \quad \ddots \\ 000000000000000000....0111111111 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11z} \\ v_{21z} \\ v_{31z} \\ \vdots \\ v_{99z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(z=1,2,3,…,9)　　(1)

$$\begin{pmatrix} 1000000001000000001000...0 \\ 0100000000100000000100...0 \\ 00100000000100000000010...0 \\ \vdots \quad \ddots \\ 000000001000....01000000001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11z} \\ v_{21z} \\ v_{31z} \\ \vdots \\ v_{99z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(z=1,2,3,…,9)　　(2)

$$\begin{pmatrix} 1110000001110000001110000001110...0 \\ 0001110000001110000001110000001...0 \\ 0000001110000001110000001110000...0 \\ \vdots \quad \ddots \\ 000000000000000000....00111000000111 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11z} \\ v_{21z} \\ v_{31z} \\ \vdots \\ v_{99z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(z=1,2,3,…,9)　　(3)

(1)式は各行、(2)式は各列、(3)式は各ブロックにおける制約式を表す。さらに、xz,yz平面の制約式は以下の式で表すことができる。

$$\begin{pmatrix} 111111111000000000000000000...0 \\ 000000000111111111000000000...0 \\ 0000000000000000001111111110...0 \\ \vdots \quad \ddots \\ 000000000000000000....0111111111 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1y1} \\ v_{2y1} \\ v_{3y1} \\ \vdots \\ v_{9y9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(y=1,2,3,...,9)　　(4)

$$\begin{pmatrix} 1000000001000000001000...0 \\ 0100000000100000000100...0 \\ 00100000000100000000010...0 \\ \vdots \quad \ddots \\ 000000001000....01000000001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1y1} \\ v_{2y1} \\ v_{3y1} \\ \vdots \\ v_{9y9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(y=1,2,3,...,9)　　(5)

$$\begin{pmatrix} 111111111000000000000000000...0 \\ 000000000111111111000000000...0 \\ 0000000000000000001111111110...0 \\ \vdots \quad \ddots \\ 000000000000000000....0111111111 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{x11} \\ v_{x21} \\ v_{x31} \\ \vdots \\ v_{x99} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(x=1,2,3,...,9)　　(6)

$$\begin{pmatrix} 1000000001000000001000...0 \\ 0100000000100000000100...0 \\ 00100000000100000000010...0 \\ \vdots \quad \ddots \\ 000000001000....01000000001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{x11} \\ v_{x21} \\ v_{x31} \\ \vdots \\ v_{x99} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(x=1,2,3,...,9)　　(7)

(4),(5)式はそれぞれ、xz平面における行、列の制約式、(6),(7)式はそれぞれ、yz平面における行、列の制約式である。ここにさらに、初期条件が与えられる。初期条件は対応する$v_{xyz} = 1$で表現される。つまり、数独を解くことは、(1)～(7)式の制約式、そして初期条件のすべてを満たす連立1次方程式の解を求める最適化過程であるといえる。

4 スキャニングの定義

人間が､上で示した連立方程式を瞬時に解くことは不可能である。しかし人間が連立方程式を解く際、特に係数が多い場合は、係数を減らす作業を行い、少しずつ解を得ていく。数独の場合でも同様で、行、列、ブロック、数字など一つに注目し、解を得ていく。厳密には、729次元ベクトル空間の部分空間をWとするとき､Wにおいて解を得る作業である。これをスキャニングの定義とする。部分空間Wの係数行列をBとすると、スキャニングを行える条件は$|B| \neq 0$となる。

5 まとめ

人間が最適化問題を解く際のテクニックは、部分空間の抽出であると仮定する。また、数独は自明でない解が存在することが明らかであるから、その部分空間においても自明でない解が存在するはずである。つまり、スキャニングを行える条件を満たす様な解を探索する事で、解を得ることも可能である。これを行うニューラルネットワークを設計し実証する。

[参考文献]

[1] S.Matsuda,” A neural network model of the decision-making process based on AHP”

[2] 大谷哲広,” ニューラルネットワークと人間の情報処理の類似性-数独の求解を例として-”