7-28

統計的判定による所望の周波数特性を有するGWMフィルタ

日大生産工（院）　○川島佑太
日大生産工　目黒光彦

1　はじめに

静止画像はガウス性雑音やインパルス性雑音の加法により劣化することが多い．そこで，雑音を低減することにより画像の劣化を抑えることが可能である．画像の劣化を抑えることは，画質向上のみならず，後に続く画像符号化，画像認識，コンピュータビジョン等の処理においても重要である．

画像からの雑音の除去にはメディアンフィルタに代表される非線形フィルタが有効であることが知られている．

線形フィルタはインパルス性雑音の除去が十分に行えず，かつ，画像へのボケを生じてしまう．それにかわってメディアンフィルタの拡張である一般化荷重メディアンフィルタは，所望の周波数特性を持つフィルタとして設計が可能である [1]．しかしながら，所望の周波数特性を持つように荷重を設計することは困難である．

設計手法として，標本選択確率（SSP）に基づいた荷重メディアンフィルタの最適化法がある [2],[3]．これは，荷重メディアンフィルタの荷重の値に応じて，フィルタ窓内のどの位置の信号値が出力値として選択されるかという確率を表す SSP 値を，所望の周波数特性を有する線形フィルタの係数値の正規化された絶対値と一致するようにする手法である．[2],[3]．しかしながら，この設計法は，窓内信号数の増加に対し，べき乗的に計算量が増える問題がある．画像処理におこなわれる 5×5 以上のフィルタ窓幅では，所望の周波数特性を持つ荷重メディアンフィルタを設計は困難である．

本論文では，SSP に基づく設計手法のアルゴリズムを簡略化し，設計時にかかる計算量を低減させながらも，ほぼ同等の性能を実現した．

2　一般化荷重メディアンフィルタ

本章では一般化荷重メディアンの理解のために，線形フィルタ，メディアンフィルタ，荷重メディアンフィルタもあわせて説明する．

【線形フィルタ】

線形フィルタは畳み込み演算により算出する処理である．注目画素とその周辺画素を含んだフィルタ窓の画素に，その位置に対応した係数を乗じ，その合計を出力するものである．線形フィルタは係数を変えることにより，ハイパス，ローパス，バンドパス特性を有したフィルタとして設計可能である．

入力信号を $x_1, x_2, ..., x_N$ とし，係数を $h_1, h_2, ..., h_N$ としたとき，線形フィルタの出力 y_{FIR} は

$$y_{FIR} = \sum_{n=1}^{N} (h_n \cdot x_n) \tag{1}$$

となる．

線形フィルタは，フィルタ窓内にインパルス性雑音のような極端に大きな値が重畳していると，出力値に大きな影響があらわれ，不都合である．

表1に線形フィルタの係数の例として画像のエッジを抽出するラプラシアンフィルタを示す．図2の原画像にラプラシアンフィルタをかけると図3のように出力される．

【メディアンフィルタ】

メディアンフィルタ (median filter) はフィルタ窓内の中央値を出力するフィルタである．フィルタ窓内の入力信号を輝度値順にソートし，中央の順位の信号値を出力する．

入力信号 $x_1, x_2, ..., x_N$ の出力 X_{med} の式は

$$X_{med} = Median(x_1, x_2, ..., x_N) \tag{2}$$

と表現される．

ソートを利用した出力の他に，フィルタ窓内の信号値の中で，他の信号値との距離の総和が最少となる信号値を出力とする方法がある．この方法の出力 X_{med} を式であらわすと

$$X_{med} = \arg\min_{X\in x_i} \sum_{i=1}^{N} |X - x_i| \tag{3}$$

となる．

メディアンフィルタは線形フィルタで行われている畳み込み処理を使わず，インパルス性雑音の影響を受けづらいロバストなフィルタ処理である．ただし，フィルタ窓内の信号の位置情報が考慮されておらず，出力結果にボケを生じさせたり，細かい模様が潰れる傾向にある．

Spectral Design of General Weighted Median Filters based on Statistical Evaluation

Yuta Kawashima and Mitsuhiko MEGURO

表 1: Laplacian フィルタの係数

0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

【荷重メディアンフィルタ】

荷重メディアン (WM: Weighted Median) フィルタはフィルタ窓内の信号値にそれぞれに荷重を加え拡張したフィルタである．メディアンフィルタに位置を考慮した荷重を加えることにより，ボケを抑えた処理をおこなうことが可能である．

荷重メディアンフィルタは入力信号 $x_1, x_2, ..., x_N$，荷重を $W_1, W_2, ..., W_N$ としたときの出力 $X_{w_{med}}$ は，

$$X_{w_{med}} = Median(W_1 \diamond x_1, W_2 \diamond x_2, ..., W_N \diamond x_N) \tag{4}$$

であり，これを求めるには式 (3) に荷重を加えた

$$X_{w_{med}} = \arg\min_{X \in x_i} \sum_{i=1}^{N} (W_i \cdot |X - x_i|) \tag{5}$$

を使う．

【GWM フィルタ】

線形フィルタは負の荷重を許すことにより，ハイパス，ローパス，バンドパスなど様々な周波数特性を持つフィルタが設計可能である．一般化荷重メディアン (GWM: General Weighted Median) フィルタは荷重メディアンに負の荷重を拡張し，ローパス特性のみならず，ハイパス，バンドパス特性のフィルタも設計可能としている．正値しか持たない画像信号を処理対象とするとき，GWM フィルタを適用するには，フィルタ窓内の局所信号に対して，適したオフセット値を算出し，あらかじめ信号値からオフセットを減算しなくてはならない．

オフセット値 O_{set} は入力信号 $x_1, x_2, ..., x_N$ の平均値 X_{mean} とメディアン値 X_{med} から算出する．平均値はフィルタ窓内にノイズがない場合は有効であるが，ノイズがある場合は適切ではない．よって O_{set} は

$$O_{set} = \begin{cases} X_{mean} & |X_{mean} - X_{med}| < \epsilon \\ X_{med} & otherwise \end{cases} \tag{6}$$

のように算出する．入力信号値から O_{set} を減算した信号 Z_i は

$$Z_i = x_i - O_{set} \tag{7}$$

となり，この値に GWM フィルタ処理を施す．

GWM フィルタの出力 X_{gwm} は，

$$\begin{aligned} X_{gwm} &= Median(|W_1| \diamond \mathrm{sgn}(W_1) \cdot Z_1, \\ &\quad ..., |W_N| \diamond \mathrm{sgn}(W_N) \cdot Z_N) \end{aligned} \tag{8}$$

とあらわす．$\mathrm{sgn}(x)$ は $x = 0$ のときは 0，$x > 0$ のときは 1，$x < 0$ のときは -1 となる．

3 既存の SSP 計算法と GWM フィルタの設計

荷重メディアンフィルタの荷重から，フィルタ窓内の信号値のうち，どの信号が出力値として選択されるかを表す標本選択確率（SSPs：Sample Selection Probabilities) を算出することができる．所望の周波数特性を有する線形フィルタの係数を，その絶対値を正規化することで得られた係数の列を求める．そして，その係数列を近似する SSP となるように荷重を設定した，荷重メディアンフィルタは所望の周波数特性を有する [2]-[4].

本章では SSP 算出法と，所望の SSP を満たす荷重を設計する手法を紹介する．

【SSP】

荷重メディアンフィルタ荷重を $W_1, W_2, ..., W_N$ としたとき，その j 番目の標本値が選択される確率 p_j は以下の式で求められる [2].

$$p_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{K_{ij}}{\begin{pmatrix} N-1 \\ i-1 \end{pmatrix}}. \tag{9}$$

ただし

$$K_{ij} = l \sum_{\substack{m_1 = 1 \\ m_1 \neq j}}^{N} \sum_{\substack{m_2 = m_1 + 1 \\ m_1 \neq j}}^{N} \cdots \sum_{\substack{m_s = m_{s-1} + 1 \\ m_s \neq j}}^{N} u(A - T_1) u(T_0^- - A) \tag{10}$$

,

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum N_{m=1} W_{(m)}, \tag{11}$$

$$T_1 = T_0 - W_j, \tag{12}$$

$$A = W_(m_1) + W_(m_2) + ... + W_(m_s). \tag{13}$$

このとき $s = N - i$ であり,T_0^- は実数線上で負の方から T_0 へ近似させた値である．また $u(x)$ は $x \geq 1$ のときに $u(x) = 1$ でありそれ以外では $u(x) = 0$ である．

【SSP 最適化】

所望の周波数特性を有する荷重メディアンフィルタの荷重は，荷重を逐次更新することによって設計する．l 番目の荷重 $W_l(n)$ を 1 回更新した荷重 $W_l(n+1)$ は以下の式で求める [2].

$$W_l(n+1) = W_l(n) + \mu(-\nabla_l \mathbf{J}(\mathbf{W})). \tag{14}$$

ただし，

$$\nabla_l \mathbf{J}(\mathbf{W}) = \sum_{j=1}^{N} 2(p_j(\mathbf{W}) - h_j) \frac{\partial}{\partial W_l} p_j(W), \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial W_l}p_j(W) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\frac{\partial K_{ij}}{\partial W_l}}{\begin{pmatrix} N-1 \\ i-1 \end{pmatrix}}, \qquad (16)$$

$$\begin{array}{l} \frac{\partial K_{ij}}{\partial W_l} = C_1(W_l)\mathrm{sech}^2(A-T_1)(\tanh(T_0^- - A)+a) \\ \quad -C_2(W_l)(\tanh(A-T_1)+1)\mathrm{sech}^2(T_0^- - A) \end{array}, \qquad (17)$$

$$\begin{array}{l} C_1(W_l) = \begin{cases} \frac{1}{2} & l=j \\ \frac{1}{2} & \exists i \quad s.t \quad m_i = l \\ -\frac{1}{2} & else \end{cases} \\ C_2(W_l) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \exists i \quad s.t \quad m_i = l \\ \frac{1}{2} & else \end{cases} \end{array}. \qquad (18)$$

負の荷重を許す GWM フィルタは，所望の周波数特性を有する線形フィルタの荷重の絶対値を正規化したものと，SSP 値を一致させるように，フィルタ荷重を設計した後，線形フィルタ係数の符号と合わせるように，負の係数に該当する荷重は，負の荷重とする．

式 (9) に従った SSP 算出法，およびフィルタ荷重の最適化は，窓のサイズが増えるごとにべき乗的に計算量が増加する．画像処理に用いられる 5×5 程度の窓幅において，SSP に従って荷重メディアンフィルタを設計することは，非常に困難である．

4　SSP 算出の高速化と簡易最適化による計算量の低減

この章では，高速に SSP を算出する手法，および，フィルタ荷重の設計における計算量の低減化を図る処理について提案する．

【SSP 算出の高速化】

式 (10) の行列 K を計算すると中心の行に値が集中し，上下の行の多くの要素は値が 0 になることがわかる．表 2 は荷重 $\mathbf{W} = \{1,1,1,1,1\}$ の場合の行列 K の値である．この 0 の値を式 (10) で求めるのは余計な計算量がかかってしまう．行列 K 内の要素が 0 であるかどうか簡単に判定する方法を提案する．

式 (10) にある $u(A-T_1)u(T_0^- - A)$ は $T_1 \leq A < T_0$ のときに 1 となる．よって行列 K のある位置 K_{ij} で想定される A のうちの最小値が $A_{min} \geq T_0$，または最大値が $A_{max} < T_1$ となれば，$K_{ij} = 0$ となる．

$$K_{ij} = \begin{cases} 0 & A_{min} \geq T_0 \\ 0 & A_{max} < T_1 \\ \text{式 (10)} & otherwise \end{cases}. \qquad (19)$$

式 (10) および式 (13) に注目すると A は荷重 W_j を除いた荷重 $W_1, W_2, ..., W_N$ の中から S 個を選択したものの総和で求めていることがわかる．この ${}_{N-1}C_S$ 種類の組み合わせの中から A_{min} と A_{max} を求めれば良い．この時 ${}_{N-1}C_S$ 種類の組み合わせを全て検討する必要はなく $W_1, W_2, ..., W_N$ をソートし，W_j を抜いたものから，最少の S 個を選択したものが A_{min}，最大の S 個を選択したものが A_{max} となる．

表 2: 荷重 $\mathbf{W} = \{1,1,1,1,1\}$ の場合の行列 K

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
6	6	6	6	6
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

【簡易最適化による計算量の低減】

5×5 窓で，式 (14) による荷重の最適化をすることは，計算量の面で現実的ではない．このため，高速に最適化を図ることのできる以下のアルゴリズムを提案する．

$$W_l(n+1) = W_l(n) + \mu(h_j - p_j(\mathbf{W})). \qquad (20)$$

なお，h_j は所望の周波数特性を持つ線形フィルタの係数であり，p_j は式 (9) および式 (19) で求めた荷重メディアンフィルタの SSP である．

5　コントラストの調整

GWM フィルタによって出力される値は線形フィルタと比べてコントラストが弱く，そのままの値を画像として出力すると視認しにくい．そのため出力値を任意に強調すると視認しやすくなる．

本論文では，GWM フィルタの出力値を，線形フィルタの出力値に近づくように最適化を図る．GWM フィルタの出力値を C 倍にするとき，C の値は以下の式で最適化する．

$$\begin{aligned} C(n+1) &= C(n) + \mu \cdot sgn(C(n)) \\ &\quad \cdot sgn(X_n) \cdot (Y_n - X_n). \end{aligned} \qquad (21)$$

このとき X_n は GWM フィルタの出力値であり，Y_n は所望の周波数特性を持つ線形フィルタの出力値，μ は定数である．

6　適用例

表 1 のようなフィルタ係数を持つラプラシアンフィルタの周波数特性と同様の特性を持つ荷重メディアンフィルタを設計する．5×5 の荷重メディアンフィルタの荷重の SSP を，表 1 で示されたフィルタ係数の絶対値を正規化した表 3 に示されている値に近似させる．

最適化の経過の様子を，最適化途中の荷重メディアンフィルタの SSP 値と表 3 で示された値との間の平均二乗誤差（MSE）を用いて評価する．MSE は

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(h_j - p_j(\mathbf{W}))^2 \qquad (22)$$

表 3: 正規化したラプラシアンフィルタ荷重

0	0	0	0	0
0	0	0.125	0	0
0	0.125	0.5	0.125	0
0	0	0.125	0	0
0	0	0	0	0

表 4: 最適化により求めた GWM フィルタ荷重

0.001302	0.001302	0.001302	0.001302	0.001302
0.001302	0.001302	-0.16291	0.001302	0.001302
0.001302	-0.16291	0.483922	-0.16291	0.001302
0.001302	0.001302	-0.16291	0.001302	0.001302
0.001302	0.001302	0.001302	0.001302	0.001302

で計算する．N は窓数である．最適化による MSE の途中経過を図 1 に示す．この最適化により設計した荷重メディアンフィルタを，ラプラシアンフィルタで負値であった位置に対応する荷重を負にすることにより GWM フィルタを設計する．求まった GWM フィルタ荷重を表 4 に示す．

GWM フィルタの出力値は，ラプラシアンフィルタに比べてコントラストの低い値が出てしまう．そのため，式を使い，GWM フィルタの出力値を C 倍にする．原画像を図 2，理想画像を図 3 としたとき $C = 3.914050$ となり，その出力画像を図 4 に示す．

7　おわりに

本稿では，一般化荷重メディアンフィルタの設計のために，算出の必要のある標本選択確率（SSP）の計算の高速化，並びに，フィルタ荷重の最適化での計算量の低減法を提案した．適用例を通じて，本手法の有効性を検証した．画像処理においては 5×5 窓による計算をする必要がある．そのため，本手法による最適化は，実用性が高いと言える．

参考文献

1. Mitsuhiko Meguro, Masahide Kaneko, and Akira Kurematsu, "A New Design Method of General Weighted Median Filters Admitting Negative Weights for Enhancement of Images Degraded by Additive Noise," Proc.SPIE, Vol.5014, pp.383-391, 2003
2. Sebastin Hoyas, Jan Bacca, and Gonzalo R. Arce "Spectral Design of Weighted Median Filters: A General Iterative Approach," IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. 53, NO.3, pp.1045-1056, MARCH 2005
3. M. K. Prasad and Y. H. Lee, "Stack filters and selection probabilities," IEEE Trans. Signal Process., vol.42, no.10, pp.2628-2642, Oct. 1994.
4. C.L.Mallows, "Some theory of nonlinear smoothers," Ann. Statist., vol.8, pp. 694-715, Jul. 1980.

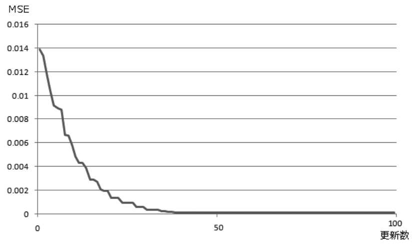

図 1: 荷重の最適化によるＭＳＥの経過

図 2: 原画像

図 3: ラプラシアンフィルタ

図 4: 最適化した GWM フィルタ