

3 次 Pythagorean Hodograph 曲線の対話的生成

日大生産工(院) ○片山 諒一 日大生産工 吉田 典正
日大生産工 齋藤 敏雄

1. 研究目的

CAD や CAM, CAGD の分野ではパラメトリックな多項式曲線が広く用いられている。しかしながら、多項式曲線のオフセット曲線は、一般に多項式（または有理式）曲線として表現できないという問題を持つ。オフセット曲線とは、曲線上の点から法線方向に一定の距離移動させることによってできる曲線で、CAM で切削工具の中心軌跡を求める際になどに利用される。切削工具の中心軌跡は、CAD で作成された形状データからオフセットを計算して設定される。CAM で扱っているのは Bézier や B-spline などの多項式、あるいは有理式のパラメトリックな曲線形式であるため、オフセット曲線は多項式で表現できず、点列データとして表現されることが多い。

Pythagorean Hodograph 曲線（以下 PH 曲線）はオフセットが有理式で表現できるという特徴を持つ曲線である¹⁾。形状データを PH 曲線によって作成することにより、オフセットを Bézier や B-spline などの曲線形式へ変形することができるため、データ転送の大幅な簡略化が期待できる。

上記のように、PH 曲線は曲線デザインやモデリングにおいて望ましい特徴を持っている。しかし、Bézier や B-spline とは異なり、各制御点を単独で動かすことができない。そ

のため、曲線形状を変化させる際はパラメータを直接指定する必要があるが、パラメータが曲線形状に与える影響は直観的に理解し難く、この方法で対話的に曲線形状を操作することは困難である。このように、PH 曲線は直観的な曲線形状の操作が難しく、対話性に問題がある。そこで、本研究では 3 次 PH 曲線を対話的に生成する手法を提案し、曲率対数グラフによって他の曲線との関連性を明らかにすることを目的とする。

2. Pythagorean Hodograph 曲線

2.1 特徴

PH 曲線は 1990 年に R.T.Farouki と T.Sakkalis によって発表されたパラメトリックな多項式の曲線形式であり²⁾、以下の二つの特徴を持っている。

- 1) 曲線のオフセットが有理式で表現可能
- 2) 弧長が多項式で表現可能

(1)の特徴により、有理 Bézier 形式でオフセット曲線を表現することが可能となる。

曲線を $\mathbf{P}(t)=(x(t), y(t))$ によって表わすとき、 $x'(t)^2 + y'(t)^2$ が t についての多項式の平方となるならば、式(1)が PH 曲線の曲線式となる¹⁾。ここで、' は t による微分を表わす。

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{P}_0 + x'(t)\mathbf{T} - y'(t)\mathbf{N} \quad (1)$$

Interactive Generation of Cubic Pythagorean Hodograph Curves

Ryo KATAYAMA, Norimasa YOSHIDA and Toshio SAITO

ここで、 \mathbf{P}_0 は曲線の始点、 \mathbf{T} と \mathbf{N} は相互に直行している単位ベクトルである。 $x(t)$ と $y(t)$ は多項式であり、それぞれの微分である $x'(t)$ と $y'(t)$ は式(1)がPH曲線となるために式(2)のように定義される。

$$\begin{aligned} x'(t) &= u^2(t) - v^2(t) \\ y'(t) &= 2u(t)v(t) \end{aligned} \quad (2)$$

$u(t)$ と $v(t)$ は、3次の場合には線形式となる。

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0(1-t) + u_1t \\ v(t) &= v_0(1-t) + v_1t \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $0 \leq t \leq 1$ である。基準となるPH曲線からオフセット曲線までの距離を d とすると、オフセット曲線は式(4)のように有理式で表わされる。

$$\mathbf{Q}_d(t) = \begin{pmatrix} x(t) + \frac{2u(t)v(t)}{u^2(t) + v^2(t)}d \\ y(t) - \frac{u^2(t) - v^2(t)}{u^2(t) + v^2(t)}d \end{pmatrix} \quad (4)$$

図1にオフセット曲線の例を挙げる。

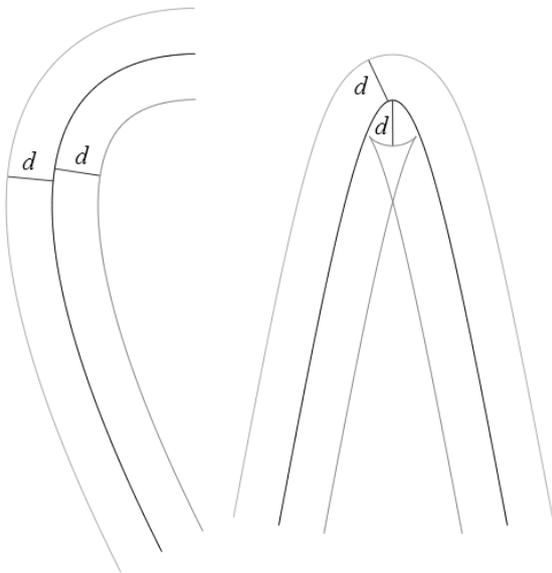


図1 オフセット曲線

2.2 PH曲線の問題点

3次PH曲線の制御点は以下のように表わされる²⁾。

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2)\mathbf{T} - \frac{2}{3}u_0v_0\mathbf{N} \quad (5)$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 + \frac{1}{3}(u_0u_1 - v_0v_1)\mathbf{T} - \frac{1}{3}(u_0v_1 + u_1v_0)\mathbf{N} \quad (6)$$

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2)\mathbf{T} - \frac{2}{3}u_1v_1\mathbf{N} \quad (7)$$

式(5), (6), (7)からわかるように、 \mathbf{P}_0 から \mathbf{P}_2 までの制御点はそれぞれ次の制御点の定義に使用されている。また、 u_0, u_1, v_0, v_1 の四つのパラメータそれぞれが、二つの制御点の定義に跨って使用されている。以上の二つの理由のために、各制御点を単独で操作することが不可能であり、BézierやB-splineのように制御点によって直観的に曲線形状を制御することができない。

3. 3次PH曲線の対話的生成

四つのパラメータ u_0, u_1, v_0, v_1 による曲線形状の操作は直観的ではなく、対話的な生成が困難であるため、線分 $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ と $\mathbf{P}_3\mathbf{P}_2$ を通る直線の交点を \mathbf{V} とし、 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_3$ 及び \mathbf{V} の三点を指定することによって曲線形状を制御する¹³⁾(図2)。これにより、三点を指定して3次PH曲線を生成できるようになり、直観性に欠けるパラメータを指定することなく、BézierやB-splineなどと同様に曲線形状の制御を行うことが可能になる。

曲線を生成するためには四つのパラメータ u_0, u_1, v_0, v_1 を定める必要があるため、三点 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_3, \mathbf{V}$ の位置関係からパラメータを求める。ここで、 \mathbf{V} における方向角を θ とすると式(8)の関係が成り立つ¹⁾。

$$v_1 = u_1 \tan \frac{1}{2}\theta \quad (8)$$

また、 u_0 または v_0 が0のとき、単位接線ベクトル \mathbf{T} 及び \mathbf{N} がそれぞれ始点の単位接線ベク

トルと単位法線ベクトルに一致する。これは曲線形状を制御する上で有用な性質であるため、ここでは $v_0 = 0$ とする。

線分 $\mathbf{P}_0\mathbf{V}$, \mathbf{VP}_3 の長さをそれぞれ k , h とし、式(8)と $v_0 = 0$ を考慮すると k と h は式(9)となる。

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{6}u_0 \left(2u_0 + u_1 \left(1 + \tan^2 \frac{1}{2}\theta \right) \right) \\ h &= \frac{1}{6}u_1 (u_0 + 2u_1) \left(1 + \tan^2 \frac{1}{2}\theta \right) \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)を連立させて解くと、 u_0 及び u_1 が求まる。続いて、 u_1 を式(8)に代入することにより v_1 が求まる。

以上で四つのパラメータが定まり、三点 \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_3 , \mathbf{V} を指定することによって曲線を対話的に生成することが可能となる。

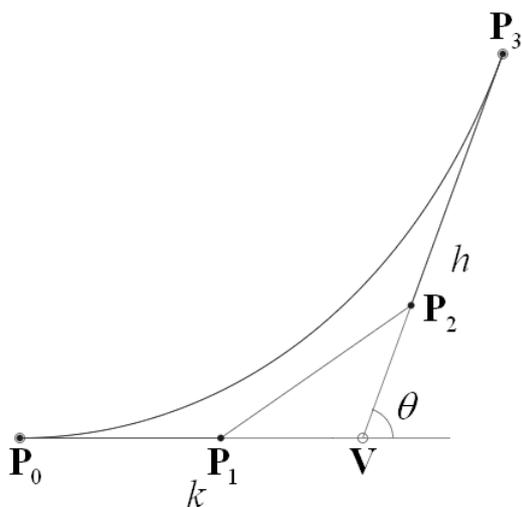


図2 三点による対話的生成

4. 曲率対数グラフとの関連性

曲率対数グラフ (Logarithmic Curvature Graph 以下 LCG) は、曲線の性質を分析するツールとして用いることができる。

LCGはx軸に $\log(\rho)$ を取る。 ρ は曲率半径である。y軸に取る $\log(\rho|ds/d\rho|)$ は式(10), (11)によって求められる³⁾。

$$\frac{d\kappa}{ds} = \frac{\det(\mathbf{Q}', \mathbf{Q}^{(3)})\mathbf{Q}' \cdot \mathbf{Q}' - 3 \det(\mathbf{Q}', \mathbf{Q}'')\mathbf{Q}' \cdot \mathbf{Q}''}{|\mathbf{Q}'|^6} \quad (10)$$

$$\frac{d\rho}{ds} = -\frac{1}{\kappa^2} \frac{d\kappa}{ds} \quad (11)$$

ここで、 \mathbf{Q}' , \mathbf{Q}'' , $\mathbf{Q}^{(3)}$ はそれぞれ式(1)の一回、二回、三回微分であり、 κ は曲率を示している。PH曲線の曲率 κ は式(12)で求めることができる¹⁾。

$$\kappa(t) = \frac{2[u'(t)v(t) - u(t)v'(t)]}{[u^2(t) + v^2(t)]^2} \quad (12)$$

曲線はLCGの傾きによって表1のように分類することができる。LCGが直線であれば、対数美的曲線となる。対数美的曲線はCAGDのために提案された曲線である。三浦らによって一般式が導かれ⁴⁾、吉田らによって全体像の解明が行われた曲線であり⁵⁾、以下のような特徴を持つ。

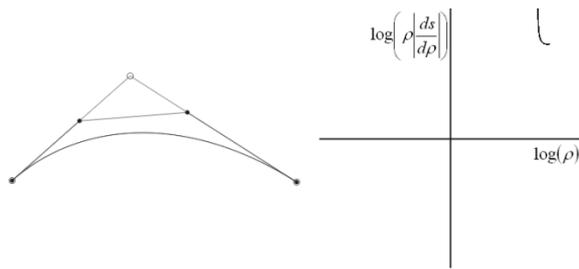
- (1) 曲率が単調に変化する。
- (2) LCG が直線となる。

3次PH曲線のLCGは、傾きが0.75に近づくほど直線に近づく。このことから、LCGの傾きが0.75付近であれば、3次PH曲線は対数美的曲線に十分に近似されていると考えられる。

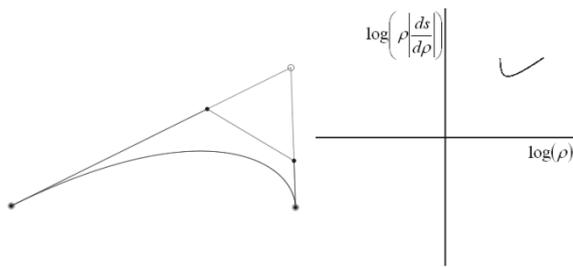
図3に対話的に生成した3次PH曲線とそのLCGを示す。

表1 曲線とLCGの関係³⁾

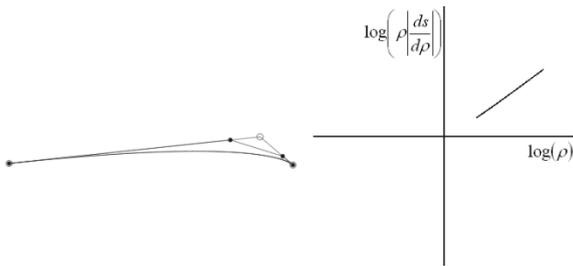
曲線	LCGの傾き
Nilsenのスパイラル	0
対数螺旋	1
円のインボリュート曲線	2
クロソイド曲線	-1
円	$\pm\infty$



(a) LCG の傾き -2.98



(b) LCG の傾き 0.31



(c) LCG の傾き 0.73

図3 3次 PH 曲線と LCG の傾き

5. まとめ

本研究では、三点を指定することによる 3 次 PH 曲線の対話的な生成と、LCG を利用した 3 次 PH 曲線と他の曲線との関連性の調査を行った。ただし、3 次 PH 曲線には次に示す制御点位置についての制限がある (図 4)。

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{P}_1\|^2 &= \|\Delta \mathbf{P}_0\| \|\Delta \mathbf{P}_2\| \\ \angle(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) &= \angle(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3) \end{aligned} \quad (13)$$

この制限のため、曲線デザインやモデリングに対して十分な柔軟性を持つ次数は 5 次以上だと考えられる。4 次でないのは、次数が偶

数の場合の PH 曲線は定義することができないためである。

今後の展望としては、上記の問題を踏まえ、5 次 PH 曲線の対話的な生成や、LCG による他の曲線との関連性の調査などが考えられる。

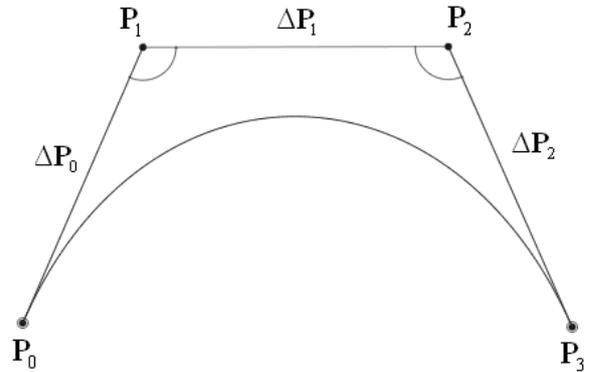


図4 3次 PH 曲線の形状制限

「参考文献」

- 1) D.J.Walton, D.S.Meek, G^2 curve design with a pair of Pythagorean Hodograph quintic spiral segments, *Computer Aided Geometric Design* 24 (2007) pp.267-285.
- 2) R.T.Farouki, T.Skkalis, Pythagorean hodographs. *IBM J. Res. Develop.*34 (1990) pp.736-752.
- 3) 平岩智之, 吉田典正, 斎藤隆文, 一般的な Class A Bezier 曲線の対話的な生成, 精密工学会秋期大会学術講演会, pp.353-354, 2007.
- 4) 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式, *Visual Computing グラフィックスと CAD 合同シンポジウム*, pp.227-232, 2005.
- 5) 吉田典正, 斎藤隆文, 美しい曲線セグメント, *情報処理学会グラフィックスと CAD 研究会*, Vol.2005, No.116, pp.97-102, 2005.