

曲げ変形と軸変形を独立とする応力法による平面骨組の構造解析に関する研究

（その2. 幾何学的非線形解析の数値検証例）

日大生産工（院） ○古川 裕介 日大生産工 川島 晃
日大生産工 花井 重孝

1. はじめに

構造安定問題の解析は、変形後の釣合を扱うため応力と変形の連成（二次応力）を支配方程式に組み込む必要がある。この増分法による解析には、初期形状における部材の局所座標を基準にして有限回転を扱う全ラグランジ法と部材の局所座標を毎回更新することで有限回転を線形化する更新ラグランジ法がある。米国では 1996 年以降、応力法の有意性が認識され、全ラグランジ定式化による解析法が報告されている^{1)~7)}。この解法では、支配方程式を表す行列は釣合式と変形の適合式を結合することにより正方行列としている（求める未知力が増える）ので、応力法の利点⁸⁾が失われる。また、応力法の有意性である応力と変形に関する独立成分の分析例が明示されていない。

本報告では、軸方向力と曲げ変形および部材回転との連成を構成式に組み組み込んだ更新ラグランジ定式化（刻々位置変化する部材の局所座標を逐次更新する）による平面骨組の幾何学的非線形解析法⁹⁾の数値検証例を示す。

2. 基本関係式⁹⁾の概要

2.1 座標と主な仮定 全体座標と局所座標は右手系に設定する。主な仮定は、以下の通りである。

- 1) 曲げによる伸縮は考慮しない。
- 2) 解析は無応力状態(0)から始めて、既知の状態(t)（基準状態と呼称する）に至ったとする。基準状態(t)から状態(t+Δt)の増分間における基本関係式は、微小な増分間での線形化を仮定する。増分表示はΔ付の記号で表す。行列の転置はTで表す。

2.2 軸方向力と曲げ変形の連成(Pδ 効果)および軸方向力と部材回転の連成(PΔ 効果)

図1に示すように基準状態における部材(p)の材端

の相対たわみ角を $\tau(N, p)$ （記号N:材端A,B）で表す。

材端曲げモーメントは $m(N, p)$ 、軸方向力は $n(p)$ （引張力を正）で表す。また、図2に示すように増分間(t~t+Δt)の部材回転 $\Delta r(p)$ により軸方向力 $n(p)$ の方向が変化する。材軸に直交する y^2 方向の相対変位を $\Delta \ell^2(p)$ として、二次応力を $\Delta n^2(p)$ とすると次の関係がある。

$$\Delta \ell^2(p) = \frac{\ell(p)}{n(p)} \Delta n^2(p) \quad (n(p) \neq 0) \quad (1)$$

基準状態の軸方向力 $n(p)$ が零のときは部材回転との連成が起こらないから、このとき相対変位 $\Delta \ell^2(p)$ は他部材との従属関係により生じる。

部材(p)の構成式は式(2)の記号で表す。

$$\Delta \tau(N, p) = H(p) \Delta \sigma(N, p) \quad (2)$$

ここに、 $H(p)$ は部材(p)の柔製行列である。

$$\Delta \tau(N, p) = [\Delta \tau(A, p), \Delta \tau(B, p), \Delta \ell^2(p), \Delta \ell(p)]^T \quad (3-1)$$

$$\Delta \sigma(N, p) = [\Delta m(A, p), \Delta m(B, p), \Delta n^2(p), \Delta n(p)]^T \quad (3-2)$$

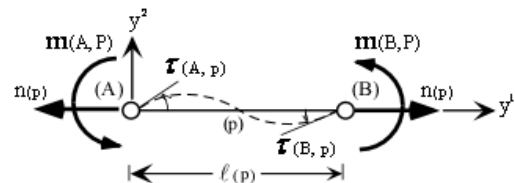


図1 軸方向力と曲げ変形の連成（基準状態）

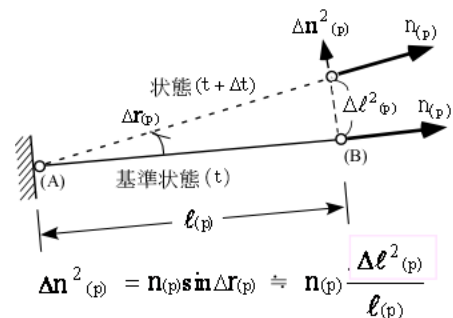


図2 軸方向力と部材回転の連成（基準状態）

A Study on the Matrix Analysis of Plane Frames which makes Slope Deformation and axis deformation of member independent by the stress method (Part2. Numerical examples of the Geometrically Nonlinear Analysis)

Y usuke HURUKAWA, Akira KAWASHIMA and Shigetaka

2.3 系全体の構成式

式(2)は部材全体に亘ってまとめ(4)式で表す。

$$\Delta \mathbf{\tau} = \mathbf{H} \Delta \mathbf{\sigma} \quad (4)$$

ここに、

$$\Delta \mathbf{\tau} = [\Delta \mathbf{\tau}_{(N,1)}, \Delta \mathbf{\tau}_{(N,2)}, \dots]^T \quad (5-1)$$

$$\Delta \mathbf{\sigma} = [\Delta \mathbf{\sigma}_{(N,1)}, \Delta \mathbf{\sigma}_{(N,2)}, \dots]^T \quad (5-2)$$

$\mathbf{H}$ は柔性行列 $\mathbf{H}_{(p)}$ (式(2))を対角項に並べた行列である。

2.4 系全体の力の釣合式

$\Delta \mathbf{\sigma}_{(N,p)}$ (式(3-2))の各成分を全体座標系で表したベクトルを $\Delta \mathbf{m}_{(N,p)}$ とする。

$$\Delta \mathbf{m}_{(N,p)} = [\Delta \mathbf{m}_{(A,p)}, \Delta \mathbf{m}_{(B,p)}, \Delta \mathbf{n}_{(A,p)}, \Delta \mathbf{n}_{(B,p)}]^T \quad (6)$$

$\Delta \mathbf{m}_{(N,p)}$ と $\Delta \mathbf{\sigma}_{(N,p)}$ の関係は部材の方向余弦ベクトルで作る行列を $\mathbf{B}_{(p)}$ とし次式で表す。

$$\Delta \mathbf{m}_{(N,p)} = \mathbf{B}_{(p)} \Delta \mathbf{\sigma}_{(N,p)} \quad (7)$$

次に、式(7)を系全体にまとめて次式で表す。

$$\Delta \mathbf{m} = \mathbf{Q} \mathbf{B} \Delta \mathbf{\sigma} = \mathbf{\Lambda} \Delta \mathbf{\sigma} \quad (8)$$

ここに、 $\Delta \mathbf{m}$ は節点(N)における外力のモーメント $\Delta \mathbf{m}_{(N)}$ および外力ベクトル $\Delta \mathbf{n}_{(N)}$ を節点番号順に並べたベクトルである。

$$\Delta \mathbf{m} = [\Delta \mathbf{m}_{(1)}, \Delta \mathbf{n}_{(1)}, \Delta \mathbf{m}_{(2)}, \Delta \mathbf{n}_{(2)}, \dots]^T \quad (9)$$

$\mathbf{Q}$ は部材と節点の接続関係を表す行列である。 $\mathbf{B}$ は行列 $\mathbf{B}_{(p)}$ を対角項に並べた行列である。

2.5 系全体の幾何学的関係式

部材(p)の材端(N=A,B)の増分節点角を $\Delta \theta_{(N,p)}$ 、および増分節点変位ベクトルを $\Delta \mathbf{u}_{(N,p)}$ として、これらをまとめて $\Delta \theta_{(N,p)}$ で表す。 $\Delta \theta_{(N,p)}$ と増分相対変位ベクトル $\Delta \mathbf{\tau}_{(N,p)}$ (式(3-1))の関係は、次式で表せる。

$$\Delta \mathbf{\tau}_{(N,p)} = \mathbf{B}_{(p)}^T \Delta \theta_{(N,p)} \quad (10)$$

式(10)において、

$$\Delta \theta_{(N,p)} = [\Delta \theta_{(A,p)}, \Delta \theta_{(B,p)}, \Delta \mathbf{u}_{(A,p)}, \Delta \mathbf{u}_{(B,p)}]^T \quad (11)$$

式(10)を系全体にまとめと次式で表せる。

$$\Delta \mathbf{\tau} = (\mathbf{Q} \mathbf{B})^T \Delta \theta = \mathbf{\Lambda}^T \Delta \theta \quad (12)$$

ここに、 $\Delta \theta$ は節点(N)の節点角 $\Delta \theta_{(N)}$ と節点変位ベクトル $\Delta \mathbf{u}_{(N)}$ を節点番号順に並べたベクトルであ

る。

$$\Delta \theta = [\Delta \theta_{(1)}, \Delta \mathbf{u}_{(1)}, \Delta \theta_{(2)}, \Delta \mathbf{u}_{(2)}, \dots]^T \quad (13)$$

3. 応力法の解法手順

系全体の基本関係式(式(4)、式(8)、式(12))において、応力増分 $\Delta \mathbf{\sigma}$ と変形増分 $\Delta \mathbf{\tau}$ の未知量はm個、変位 $\Delta \theta$ の未知量はn個とすると、 $\mathbf{H}$ は(m×m)の行列、 $\mathbf{\Lambda}$ は(n×m)の行列である。

応力法の解式は、**図3**に示すフローチャートのようになる。 $\mathbf{\Lambda}^+$ は $\mathbf{\Lambda}$ のムーア・ペンローズ一般逆行列、 $\mathbf{I}_m$ は(m×m)の単位行列、 $\Delta \mathbf{\beta}$ は(m×1)の任意ベクトルである。

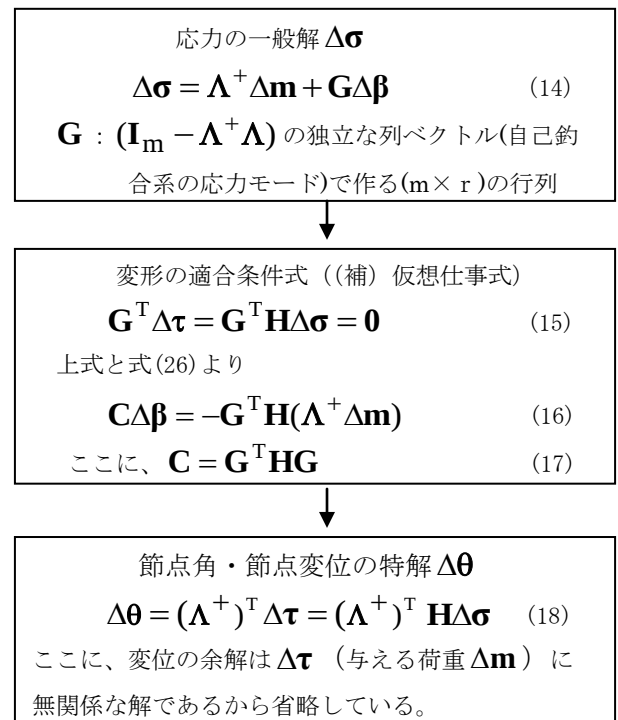


図3 応力法の解法手順

- 1) 荷重増分 $\Delta \mathbf{m}$ を与えて応力増分 $\Delta \mathbf{\sigma}$ (式(14))の特解 $\mathbf{\Lambda}^+ \Delta \mathbf{m}$ (骨組を剛体とした解)を求める。
- 2) $\Delta \mathbf{\sigma}$ の余解項の係数行列 $(\mathbf{I}_m - \mathbf{\Lambda}^+ \mathbf{\Lambda})$ の独立なr個の列ベクトルで作る(m×r)の行列 $\mathbf{G}$ をグラムシュミット法により求める。
係数行列 $(\mathbf{I}_m - \mathbf{\Lambda}^+ \mathbf{\Lambda})$ のランクr(不静定次数)は式(19)より求まる。
$$r = \text{trace}(\mathbf{I}_m - \mathbf{\Lambda}^+ \mathbf{\Lambda})$$
(対角成分の総和 (19))
- 3) 柔性行列 $\mathbf{H}$ を作成し、(r×r)の適合行列(対称行列) $\mathbf{C}$ (式(17))を計算する。
- 4) 変形の適合条件について、応力の特解を剛性条件により再配分する $\Delta \mathbf{\beta}$ (式(16))を解く。

a) 適合行列 $\mathbf{C}$ が非特異のとき

$$\Delta\beta = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{H}(\Lambda^+\Delta\mathbf{m}) \quad (20)$$

b) 適合行列 $\mathbf{C}$ が特異のとき

$\Delta\beta$ の特解を $\Delta\beta^P$ 、余解を $\Delta\beta^C$ で表す。

$$\Delta\beta = \Delta\beta^P + \Delta\beta^C \quad (21)$$

上式において、

$$\Delta\beta^P = -\mathbf{C}^+\mathbf{G}^T\mathbf{H}(\Lambda^+\Delta\mathbf{m}) \quad (22)$$

$$\Delta\beta^C = (\mathbf{I}_q - \mathbf{C}^+\mathbf{C})\Delta\alpha \quad (23)$$

ここに、 $\mathbf{I}_q$ は $(q \times q)$ の単位行列である。 $\Delta\alpha$ は $(q \times 1)$ の任意のベクトルである。このように特異点では応力（特解 $\Lambda^+\Delta\mathbf{m}$ ）を剛性条件により再配分する $\Delta\beta$ が一意に決定できないので座屈現象が明快となる。

5) 応力増分 $\Delta\sigma$ と変形増分 $\Delta\tau$ および節点角・変位増分 $\Delta\theta$ を求める。

a) 適合行列 $\mathbf{C}$ が非特異のとき

式(20)を式(14)に代入してまとめると、

$$\Delta\sigma = (\mathbf{I}_m - \mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{H})(\Lambda^+\Delta\mathbf{m}) \quad (24)$$

また構成式（式(4)）より

$$\Delta\tau = \mathbf{H}(\mathbf{I}_m - \mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{H})(\Lambda^+\Delta\mathbf{m}) \quad (25)$$

次に、 $\Delta\tau$ を式(18)に代入して $\Delta\theta$ を求める

b) 適合行列 $\mathbf{C}$ が特異のとき

特異点後の荷重変位関係を分析する必要がある場合は中立安定状態（ $\Delta\mathbf{m} = \mathbf{0}$ ）における応力場、すなわち変形の適合行列（剛性条件） $\mathbf{C}$ に依存する自己釣合系の応力モード（ $\Delta\tilde{\sigma}^C$ ）を与えて対応する変位場に移行する。 $\Delta\tilde{\sigma}^C$ は $\Delta\beta^C$ （式(23)）を $\Delta\beta$ （式(14)）に代入すると、

$$\Delta\tilde{\sigma}^C = \mathbf{G}(\mathbf{I}_q - \mathbf{C}^+\mathbf{C})\Delta\alpha \quad (26)$$

$$\Delta\tilde{\tau}^C = \mathbf{H}\mathbf{G}(\mathbf{I}_q - \mathbf{C}^+\mathbf{C})\Delta\alpha \quad (27)$$

また、 $\Delta\beta^P$ （式(22)）を $\Delta\beta$ に代入してまとめると

$$\Delta\sigma = (\mathbf{I}_m - \mathbf{G}\mathbf{C}^+\mathbf{G}^T\mathbf{H})(\Lambda^+\Delta\mathbf{m}) \quad (28)$$

$\Delta\beta^P$ による変形 $\Delta\tau$ は、

$$\Delta\tau = \mathbf{H}(\mathbf{I}_m - \mathbf{G}\mathbf{C}^+\mathbf{G}^T\mathbf{H})(\Lambda^+\Delta\mathbf{m}) \quad (29)$$

5) 新たな応力ベクトル $\sigma|(t + \Delta t)$ と節点の位置ベクトル $x|(t + \Delta t)$ は次式(30-1, 2)より求める。

$$\sigma|(t + \Delta t) = \sigma|(t) + \Delta\sigma \quad (30-1)$$

$$x|(t + \Delta t) = x|(t) + \Delta u \quad (30-2)$$

ここに、 Δu は節点変位ベクトルであり、式(13)に示してあるように式(18)から求まる $\Delta\theta$ の成分 $\Delta u(1), \Delta u(2), \dots$ である。また、材長 $\ell|(t + \Delta t)$ を求め直して部材の方向余弦ベクトルを計算し、全荷重 $m|(t + \Delta t)$ との不釣合力 p を求める。

特異点では $\Delta\tilde{\sigma}^C$ （式(26)）の $\Delta\alpha$ に微小な値を与え、式(30-1)の $\Delta\sigma$ に加える。同様に、 $\Delta\tilde{\tau}^C$ （式(28)）を $\Delta\tau$ （式(18)）に代入して得られる節点角・節点変位 $\Delta\theta$ の成分である $\Delta\tilde{u}^C$ を節点の位置ベクトル x （式(30-2)）に加える。このように式(24)の $\det(\mathbf{C}) = 0$ を解消して、次の増分ステップに移行する。系全体の安定条件は式(31)で表す。

$$\Delta\tau^T \Delta\sigma > 0 \quad (31)$$

9) 増分間の収斂計算

収斂計算は不釣合力 p のノルムの平均 (Er) が 10^{-3} 以下となるまで 1) ~ 5) を繰り返す。

$$Er = \frac{\|p\|}{N} \leq 10^{-3} \quad (N : \text{変位成分総数}) \quad (32)$$

4. 数値検証例

4.1 軸変形を無視するエラスチカ問題(図4)

中心圧縮力を受ける片持柱のエラスチカ問題について、チモシェンコの理論解と比較検討した。

部材は4分割とした。部材の回転角と曲率は微小回転の式であり、軸剛性有無の影響を分析した。

なお、単純特異点(式(17)の適合行列 $\mathbf{C}$ のランク 1) における $\Delta\beta^C$ （式(23)）の係数 $\Delta\alpha$ は、頂点の水平変位が材長 ℓ_0 の 1/1000 になるように指定した。

図5は鉛直方向の荷重変位曲線を、図6は水平方向の荷重変位曲線である。同図中の○印は軸変形を無視して有限回転を考慮する理論解である。

図5の太実線で示す軸剛性を無視する結果は理論解によく一致している。

図6の太実線と破線で示す解析結果は微小回転の式であるため大変形領域

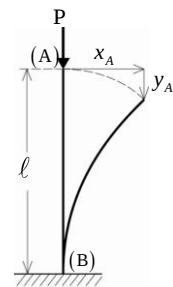


図4 エラスチカ問題

で若干の差異が生じている。

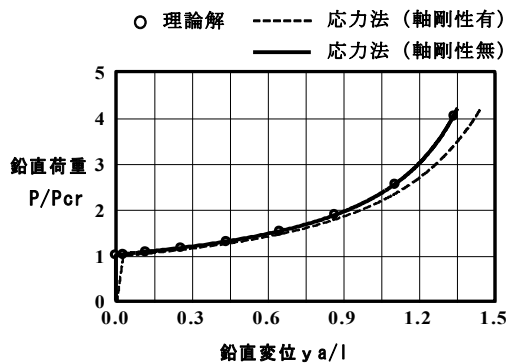


図5 鉛直方向の荷重変位曲線

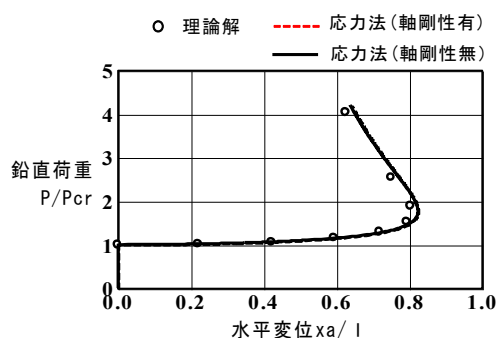


図6 水平方向の荷重変位曲線

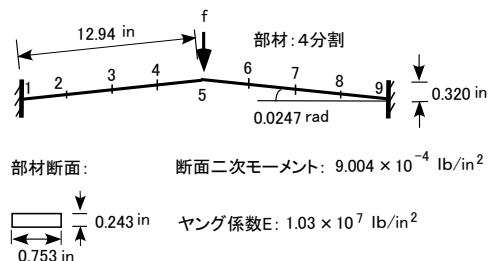


図7 F.W.williams の実験モデル

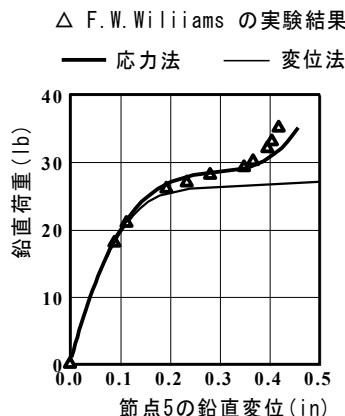


図8 荷重変位曲線

4.2 扁平な屋根面に対する実験モデル(図7)

応力解の性質を調べることを目的として、F.W.williams 実験モデルを解析した。比較解は変位法（本基本関係式を組み合わせ変位を解く）で、荷重増分ステップは 35 とした。図8は頂点の荷重変位曲線で、実験結果を△印、応力法の解析結果を太実線、変位法の解析結果を細線で示している。

5. まとめ

以上、応力法について次の知見を得た。

(1) 軸変形を無視（軸剛性を無限大と）する「エラスチカ問題」で示したように、鉛直方向変位は理論解に一致する。また、軸変形を考慮した解析では必然的に鉛直変位が増大する。

(2) このように部材変形 $\Delta\tau$ と節点角・節点変位成分 $\Delta\theta$ の性質を分析することができる。これは変位法には無い、応力法の有意性の一つである。

(3) 幾何学的非線性が顕著な「扁平な屋根面に対する F.W.williams 実験モデル」で示したように、応力法は変位法に比べ安定した解を得る。

参考文献

- 1) Aref, A.J. and Zaoyang G.(2001) : Framework for finite element-based large increment method for nonlinear structural Problems, Journal of Engineering Mechanics, 127 (7), 739-746.
- 2) Raju, Krishnam N.R.B. and Nagabhushanam, J. (2000) : Nonlinear structural analysis using integrated force method. In: Sadhana Academy Proceedings In Engineering Sciences, 25 . pp. 353-365.
- 3) Kaljevie, I., Patnaik, S.N. and Hopkins, D.A. (1996) : Development of Finite Elements for Two-Dimensional Structural Analysis Using the Integrated Force Method, Computers & Structures, Vol.59, NO.4, pp.691-706
- 4) Kaljevie, I., Patnaik, S.N. and Hopkins, D.A. (1996) : Three-Dimensional Structural analysis by the Integrated force method, Computers & Structures, Vol.58, NO.5, pp.869-886
- 5) Spacone, E., Filippou, F.C., and Taucer, F.F. (1996): Fibre Beam-Column Model for Non-Linear Analysis of R/C Frames Part1. Formulation. Earthquake Engineering and Structural Dynamics. Vol.25, pp.711-725
- 6) Spacone, E., Filippou, F.C., and Taucer, F.F. (1996): Fibre Beam-Column Model for Non-Linear Analysis of R/C Frames Part2. Applications. Earthquake Engineering and Structural Dynamics. Vol.25, pp.727-742
- 7) Spacone, E., Ciampi, V., and Filippou, F.C. (1996): Mixed Formulation of Nonlinear Beam finite Elements. Computers & Structures, Vol.58, NO.1, pp.71-83
- 8) 花井重孝, 川島晃, 石丸麟太郎, 田中尚 : 立体ラーメンの微小変位応力解析 (その2 応力法), 日本建築学会構造系論文集, 第 570 号, pp. 61-68, 2003. 8
- 9) 川島晃, 花井重孝, 古川裕介, 池田芳弘 : 応力法による平面骨組の幾何学的非線形解析に関する研究 (その1 基本関係式), 日本建築学会大会学術講演梗概集 (東北), pp. 377-378, 2009. 8