

応力法による形態解析に関する研究

（その2. 不安定剛体トラス）

日大生産工（院）○佐々木 義仁 日大生産工 川島 晃

日大生産工 花井 重孝

1. はじめに

田中尚博士と故・半谷裕彦博士は不安定剛体トラスについて、「微小剛体変位と有限剛体変位の存在条件、幾何剛性の構成と安定条件など」を検討した¹⁾。また、伸び無し変位（余解）モードとポテンシャルエネルギー最小原理に基づいた不安定リンク構造の形態解析（形状決定解析）を示した²⁾。この解法は伸び無し変位の適合条件によるものであるから釣合形状における張力を直接求めることができない。

本報では系全体の基本関係式と応力の余解を得る変形の適合条件式および、釣合形状の張力を求める不安定剛体トラスの形態解析ならびに簡単なモデル実験を行い、釣合形状およびその材長が初期形状の材長を保つかどうかの数値検証結果を示す。

2. 系全体の基本関係式

基準状態(t)から状態(t+Δt)の増分間における系全体の増分基本関係式を定式化する。

2.1 力の釣合式

部材の釣合式(その1)の式(18), (23))を再録する。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}(A, p) \\ \mathbf{f}(B, p) \end{bmatrix} = n(p) \begin{bmatrix} -\lambda(p) \\ \lambda(p) \end{bmatrix} \quad (i)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{f}(A, p) \\ \Delta \mathbf{f}(B, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Lambda(p) \\ \Lambda(p) \end{bmatrix} \Delta \mathbf{n}_3(p) \quad (ii)$$

式(i)と式(ii)を系全体で定式化する。

基準状態における部材(p)の釣合式(式(i))を見ると材端(A)の $\mathbf{f}(A, p)$ には $-\lambda(p)$ が、材端(B)の $\mathbf{f}(B, p)$ には $\lambda(p)$ が掛けられている。ここに、 $\mathbf{f}(A, p)$ と $\mathbf{f}(B, p)$ は軸方向力 $n(p)$ が節点(A)と(B)に及ぼす力を示したものであるから、節点(k)に集まる $\mathbf{f}(k, p)$ の総和は荷重ベクトル $\mathbf{f}(k)$ に等しい。この関係を図1に示すトラスの

節点1～節点4に適用すると、力の釣合式は表1となる。表1を全節点に適用し、境界条件を考慮して出来上がったマトリックスを $\mathbf{B}$ とおき式(1)で表す。

$$\mathbf{f} = \mathbf{Bn} \quad (1)$$

同様に、増分間における部材(p)の釣合式(式(ii))を見ると材端(A)の $\Delta \mathbf{f}(A, p)$ には $-\Lambda(p)$ が掛けられ、材端(B)の $\Delta \mathbf{f}(B, p)$ には $\Lambda(p)$ が掛けられている。この関係を図1に示すトラスに適用すると表2が得られる。

表2を全節点に適用して、境界条件を考慮して出来上がったマトリックスを $\mathbf{A}$ とおけば

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{n}_3 \quad (2)$$

が得られる。ここに、 $\Delta \mathbf{f}$ は力学的境界条件を考慮した荷重増分ベクトルであり、その成分数を n とする。

$\Delta \mathbf{n}_3$ は部材(p)の増分力ベクトル $\Delta \mathbf{n}_3(p)$ を部材番号

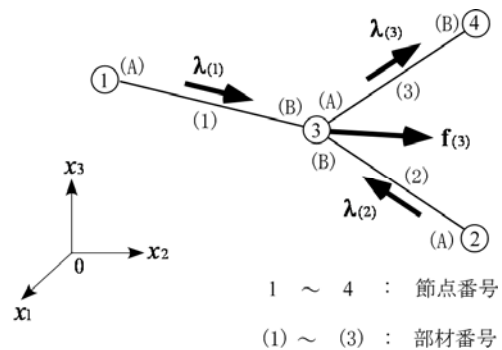


図1 剛体トラスの一部

表1 基準状態の釣合マトリックス $\mathbf{B}$

axial forces loads	$n(1)$	$n(2)$	$n(3)$
$\mathbf{f}(1)$	$-\lambda(1)$	0	0
$\mathbf{f}(2)$	0	$-\lambda(2)$	0
$\mathbf{f}(3)$	$\lambda(1)$	$\lambda(2)$	$-\lambda(3)$
$\mathbf{f}(4)$	0	0	$\lambda(3)$

A Study on the Shape Analysis by the stress method

(Part2. Unstable Rigid Truss Structures)

Yoshihito SASAKI, Akira KAWASHIMA and Shigetaka HANAI,

表2 増分間の釣合マトリックス Λ

axial forces loads	$\Delta \mathbf{n}_3(1)$	$\Delta \mathbf{n}_3(2)$	$\Delta \mathbf{n}_3(3)$
$\Delta \mathbf{f}(1)$	$-\Lambda(1)$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\Delta \mathbf{f}(2)$	$\mathbf{0}$	$-\Lambda(2)$	$\mathbf{0}$
$\Delta \mathbf{f}(3)$	$\Lambda(1)$	$\Lambda(2)$	$-\Lambda(3)$
$\Delta \mathbf{f}(4)$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\Lambda(3)$

順に並べ、基準状態における軸方向力 $n(p)$ が零の部材の二次応力 $\Delta n^1(p), \Delta n^2(p)$ を消去したベクトルである。 $\Delta \mathbf{n}_3$ の成分数を q とすると、 Λ は $(n \times q)$ のマトリックスである。

2.2 幾何学的関係式

増分間における部材 (p) の幾何学的関係式（その1）の式(15)) は次式で表せる。

$$\Delta \mathbf{l}_3(p) = \Lambda(p)^T (-\Delta \mathbf{x}(A) + \Delta \mathbf{x}(B)) \quad (3)$$

式(3)はマトリックス Λ を用いて系全体に拡張する。

$$\Delta \mathbf{l}_3 = \Lambda^T \Delta \mathbf{x} \quad (4)$$

ここに、 $\Delta \mathbf{l}_3$ は部材 (p) の増分相対変位ベクトル $\Delta \mathbf{l}_3(p)$ （その1）の式(14)) を部材番号順に並べ、基準状態にける軸方向力 $n(p)$ が零の部材の二次応力 $\Delta n^1(p), \Delta n^2(p)$ に対する増分相対変位 $\Delta \ell^1(p), \Delta \ell^2(p)$ を消去したベクトルである。 $\Delta \mathbf{x}$ は節点 (k) の増分変位ベクトル $\Delta \mathbf{x}(k)$ を節点番号順に並べ、固定されている境界の増分節点変位成分を消去したベクトルである。

2.3 構成式

部材 (p) の構成式（その1）の式(25)) を部材全体にわたってまとめると、次式で表せる。

$$\Delta \mathbf{l}_3 = \mathbf{S}_3 \Delta \mathbf{n}_3 \quad (5)$$

ここに、 $\mathbf{S}_3$ は部材 (p) の柔性マトリックス $\mathbf{S}_3(p)$ （その1）の式(27)) を部材番号順に対角項に並べ、基準状態における軸方向力 $n(p)$ が零の部材の $\Delta n^1(p), \Delta n^2(p)$ に対応する成分を消去した $(q \times q)$ のマトリックスである。

3. 変形の適合条件式と応力法

増分釣合式（式(2)) の一般解 $\Delta \mathbf{n}_3$ は、 $(n \times q)$ のマトリックス Λ のムーア・ペンローズ一般逆行列 Λ^+ を

用いると、

$$\Delta \mathbf{n}_3 = \Lambda^+ \Delta \mathbf{f} + (\mathbf{I} - \Lambda^+ \Lambda) \Delta \beta \quad (6)$$

で表せる。ここに、 $\mathbf{I}$ は $(q \times q)$ の単位マトリックス、 $\Delta \beta$ は $(q \times 1)$ の任意ベクトルである。

式(6)の力学的内容は、次のとおりである。

1) $\Lambda^+ \Delta \mathbf{f}$ は特解であり、基準状態の幾何形状を表すマトリックス Λ と荷重増分 $\Delta \mathbf{f}$ により一意に求まる。

2) $(\mathbf{I} - \Lambda^+ \Lambda) \Delta \beta$ は余解であり、荷重増分 $\Delta \mathbf{f}$ に関係に生じるから自己釣合の応力系を表す。

係数マトリックス $(\mathbf{I} - \Lambda^+ \Lambda)$ は q 個の列ベクトルをもつ、そのうちの r 個（不静定次数）の独立な列ベクトルを選んで正規化して $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_r$ で表す。この自己釣合（ $\Delta \mathbf{f} = \mathbf{0}$ ）の応力モード $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_r$ は、

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_r] \quad (7)$$

とおき、任意ベクトル $\Delta \beta$ を $\Delta \gamma$ に置き換えると

$$(\mathbf{I} - \Lambda^+ \Lambda) \Delta \beta = \mathbf{G} \Delta \gamma \quad (8)$$

である。式(8)を一般解 $\Delta \mathbf{n}_3$ （式(6)）に用い、構成式(5)に代入すると、次式となる。

$$\Delta \mathbf{l}_3 = \mathbf{S}_3 (\Lambda^+ \Delta \mathbf{f} + \mathbf{G} \Delta \gamma) \quad (9)$$

式(7)の自己釣合の応力モード $\mathbf{g}_j$ を仮想力とすると、（補）仮想仕事の原理より変形の適合条件式は、

$$\mathbf{g}_j^T \Delta \mathbf{l}_3 = \mathbf{g}_j^T \mathbf{S}_3 (\Lambda^+ \Delta \mathbf{f} + \mathbf{G} \Delta \gamma) = 0 \quad (10)$$

となる。式(10)は全ての自己釣合の応力モード $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_r$ に適用して式(7)の記号 $\mathbf{G}$ を用いると、

$$\mathbf{G}^T \Delta \mathbf{l}_3 = \mathbf{G}^T \mathbf{S}_3 (\Lambda^+ \Delta \mathbf{f} + \mathbf{G} \Delta \gamma) = \mathbf{0} \quad (11)$$

ここに、右辺の $\mathbf{G}^T \mathbf{S}_3 \mathbf{G}$ は、 $(r \times r)$ の対称マトリックスである。式(11)は、力の釣合式（式(1)）を制約条件とする全補足エネルギー最小の原理からも導かれる。

式(11)を $\Delta \gamma$ について解き、式(8)に代入すると式(6)より $\Delta \mathbf{n}_3$ が求まる。次に、 $\Delta \mathbf{n}_3$ を式(5)に代入すると増分相対変位ベクトル $\Delta \mathbf{l}_3$ が求まる。 $\Delta \mathbf{l}_3$ を幾何学的関係式（式(4)）に代入すると、増分節点変位ベクトル $\Delta \mathbf{x}$ の一般解は次式で表せる。

$$\Delta \mathbf{x} = (\Lambda^+)^T \Delta \mathbf{l}_3 + (\mathbf{I} - \Lambda \Lambda^+) \Delta \mu \quad (12-1)$$

ここに、 $\mathbf{I}$ は $(n \times n)$ の単位マトリックス、 $\Delta \mu$ は $(n \times 1)$ の任意ベクトルである。左辺第1項 $(\Lambda^+)^T \Delta \mathbf{l}_3$

は特解であり、 Δl_3 により一意に求まる。右辺第2項 $(\mathbf{I}-\Lambda\Lambda^+)\Delta\mu$ は余解であり、 Δl_3 には無関係な解である(付録参照)。すなわち、増分変位ベクトル $\Delta\mathbf{x}$ は次式で求まる。

$$\Delta\mathbf{x}=(\Lambda^+)^T\Delta l_3=(\Lambda^+)^TS_3\Delta n_3 \quad (12-2)$$

4. 不安定剛体トラスの形態解析手順

手順1) 予め初期形状(節点座標値)を設定して、節点荷重(常に一定値とする)を加える(図2)。そして、式(1)を用いて軸方向力(図3)を求める。

手順2) 不安定であるから手順1)で求めた軸方向力は節点荷重に釣合わない。この不釣合力による節点移動を求める。すなわち、リンク運動による二次応力の発生(図4)により不静定(r (=応力数-釣合式数)=2次不静定)に置きかえることができるので増分釣合式(式(2))を解き、得られた増分応力 Δn_3 を式(12-2)に代入してリンク運動 $\Delta\mathbf{x}$ を求めることができる(図5)。

変位法では部材伸縮を無視するとき、軸方向力と伸縮の関係を表す軸剛性が無限大となるので、軸方向力を求めることができない。

手順3) 手順2)で求めた $\Delta\mathbf{x}$ により節点座標を更新し軸方向力を求め直し、節点荷重と釣合うまで繰り返し計算を行う。

5. 数値検証例

本項では、チェーンを用いた吊り下げ実験との数値検証結果を述べる。実験は、懸垂線の吊り下げ点を変化させたプランⅠ～Ⅲとコロニア・グエル教会をモデルにしたプランⅣの4例である。

図5～図8は、プランⅠ～プランⅣの実験と解析結果の釣合形状を比較したものを示したものである。V字状の線は解析で用いた初期形状であり、それぞれ図のように錘を下げた。点線は実験結果である。また、実線は解析結果である。解析結果と吊り下げ実験の釣合形状は良く一致している。

図9はプランⅠの解析における初期形状の材長と求まった安定形状の材長を比較したものである。釣合形状の材長は初期形状のそれにほぼ等しい結果が得られた。

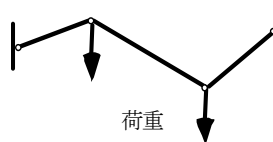


図2 節点荷重と初期形状 (設定)

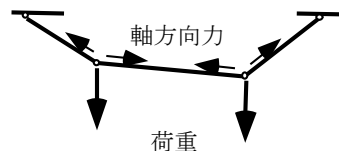
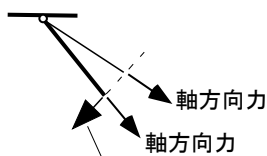


図3 節点荷重と軸方向力 (不釣合状態)



リンク運動によって生じる軸方向力の方向変化による二次応力

図4 リンク運動と二次応力

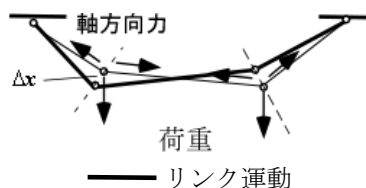


図5 形態変化の概念図

6. あとがき

以上、全ポテンシャルエネルギー最小の原理²⁾を用いず、力の釣合に基づく不安定剛体トラスの形態解析を示した。また、釣合形状の材長は初期形状の材長を近似できることを示した。

付録:式(12-1)とリンク運動の関係

リンク機構(図5)は二次応力の発生により不静定に置き換えられるのでマトリックスのランクより、式(12-1)の余解項の係数マトリックス $(\mathbf{I}-\Lambda\Lambda^+)$ は零マトリックスとなる。したがって、増分節点変位ベクトル $\Delta\mathbf{x}$ (リンク運動)は式(12.2)で与えられる。

参考文献

- 1) 田中尚, 半谷裕彦:不安定トラスの剛体変位と安定化条、日本建築学会論文報告集, N0. 356, pp. 35-42, 1985. 10
- 2) 半谷裕彦, 川口健一:形態解析 一般行列の応用, 培風館, 1991. 4

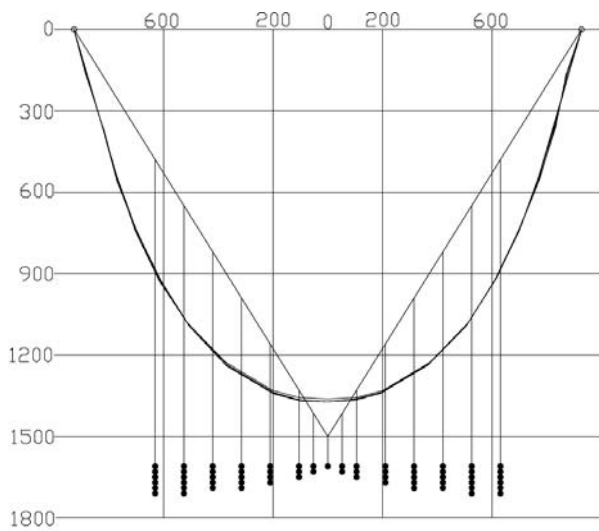


図5 プランⅠの解析結果と実験結果

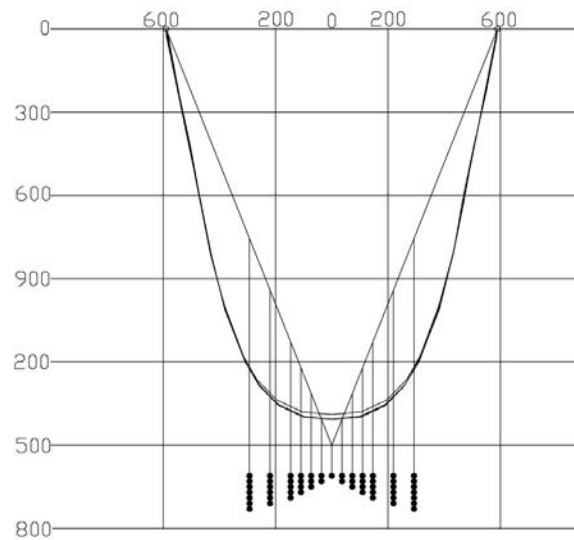


図6 プランⅡの解析結果と実験結果

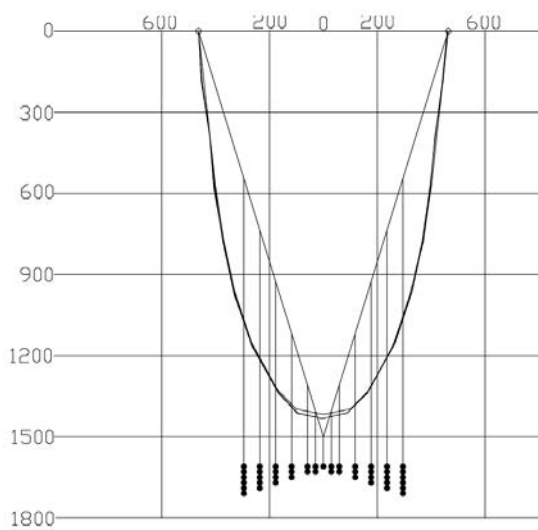


図7 プランⅢの解析結果と実験結果

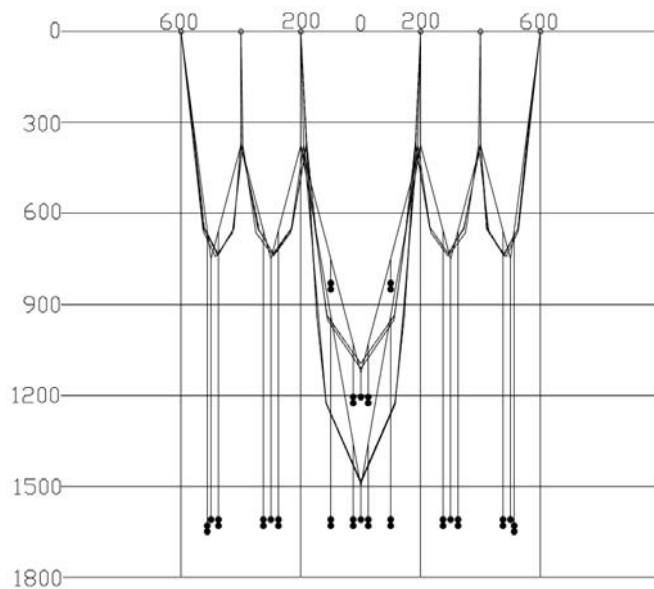


図8 プランⅣの解析結果と実験結果

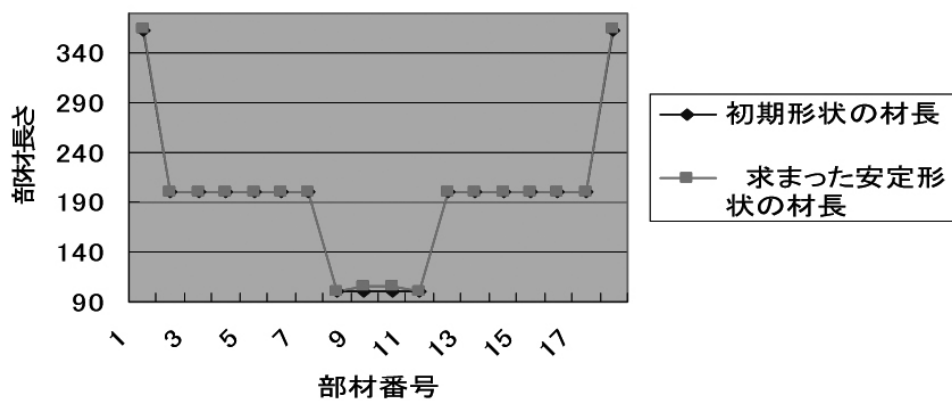


図9 解析における初期形状と釣合形状の材長比較 (プランⅠ)