

応力法による形態解析に関する研究

（その1. 基本関係式）

日大生産工 ○川島 晃 日大生産工（院）佐々木 義仁

日大生産工 花井 重孝 日大生産工（院）竹内 嘉一

1. はじめに

形態解析は 1985 年以降、コンピュータ性能および数値計算技術の飛躍的な進歩により発達し、膜構造・ケーブルネット構造・パンタドームなどの空間構造の設計に大きな役割を果たした。田中尚博士と故・半谷裕彦博士は不安定剛体トラスの形態解析理論¹⁾を示した。その研究成果は「構造形態の解析と創生」と題して発表された（文献 2））。ここに、応力法による形態解析は見当たらない。形態解析と応力法の歴史的な成り立ちについては以下の通りである。数学者レオンハルト・オイラー（1707－1783）の解析力学（変分法）は力学系の新しい見方（長柱座屈後の安定な釣合径路）を与えた。これが形態解析の原点と言われている³⁾。応力法は、ジョセフ・ラグランジェによる「剛体に働くつり合い系の仮想仕事の原理（1788）」から出発した。カスティリアーノは最小仕事の原理を確立した（1879）。そして不静定構造（トラス・梁・アーチなど）に適用した。故・小野薫博士は仮想仕事の原理を「剛節ラーメンの工学的視点から部材の伸縮を無視する不安定（置換）トラスの節点系仮想仕事に基づく適合条件式⁵⁾」を確立した⁵⁾。そして、「愛弟子田中尚博士が追遺を加えて撓角法（文献 6）を上梓された」。小野博士の大学院 1 期生であった故・齋藤謙次博士は「たわみ角法による不規則な剛節ラーメンの機械的解法」⁷⁾に発展させた。また、平面骨組の節点系仮想仕事式に基づく応力法（作表計算法）を確立した⁸⁾。このマトリックス解法の前駆けである応力法は、齋藤博士の大きな業績の一つである。

提案する応力法は、「立体骨組の構造解析」⁹⁾を形態解析に応用したものである。本項（その 1）では、不安定剛体トラスおよびケーブルネットの形態解析の基本関係式を示す。そのアイデアは、軸方向力の方向変化（幾何学的非線形性）による二次応力と部材の相

対変位関係を構成式に組み込み、節点系仮想仕事の原理（全補足エネルギー最小の原理）に基づく適合条件式に反映させた。

2. 基本関係式

2.1 座標と仮定

全体座標と部材の局所座標は右手系に設定する。定式化の仮定は次の通りである。

- 1) 初期状態を設定し、釣合形状を求める。
- 2) 初期状態から刻位置変化する状態量（図 1）は単調増加パラメータ t の一価関数で表し次の記号を使う。

$$\frac{d(\quad)}{dt} = \dot{(\quad)}, \quad \dot{(\quad)}\Delta t = \Delta(\quad) \quad (1-1, 2)$$

- 3) 基準状態 (t) から状態 ($t + \Delta t$) の増分間における基本関係式は、微小な増分間での線形化を仮定する。
- 4) 不安定剛体トラスでは節点荷重の比率を設定する。またケーブルネットでは等張力（すべり交点の仮定）を設定する。

2.2 記号

記号は英文字とギリシャ文字を用い、小文字細字はスカラー、小文字太字はベクトル、大文字太字はマトリックスを、肩付添字 + はムーア・ペンローズ一般逆行列を表す。ベクトルを成分表示するとき行ベクトルは $\{\}$ 、列ベクトルは $[\]$ を付けて表す。

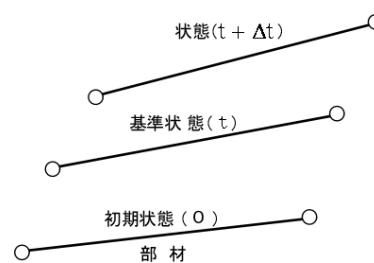


図1 状態変化

A Study on the Shape Analysis by the stress method (Part1. Fundamental Equations)

Akira KAWASHIMA, Shigetaka HANAI,

Yoshihito SASAKI and Yoshikazu TAKEUCHI

3. 部材の増分基本関係式

本節では、基準状態(t) から状態(t + Δt) の増分間における部材の幾何学的関係式と力の釣合式および構成式を記述する。

3.1 幾何学的関係式

図2は、基準状態における部材(p)の幾何学的関係式に用いる記号を示す。図中の $\mathbf{x}_i(i = 1, 2, 3)$ は空間固定座標系(右手系)である。(A)と(B)は部材(p)の材端が接続する節点を表す。 $\mathbf{x}(A)$ と $\mathbf{x}(B)$ は空間固定座標系の原点Oに対する節点(A)と(B)の位置ベクトル、 $\mathbf{u}(A)$ と $\mathbf{u}(B)$ は節点(A)と(B)の変位ベクトルである。 $\boldsymbol{\lambda}(p)$ は部材(p)の材軸方向を示す単位ベクトルで材端(A)を始点とする。 $\boldsymbol{\lambda}^1(p)$ と $\boldsymbol{\lambda}^2(p)$ は材軸に直交する2方向の単位ベクトルである。材長は $\ell(p)$ で表す。

本項では、次の2式を記述する。

- 1) 部材(p)の局所座標に関する増分相対変位ベクトル $\Delta \mathbf{l}_3(p)^T = \{\Delta \ell(p), \Delta \ell^1(p), \Delta \ell^2(p)\}$ (図3(a))と空間固定座標系における増分相対変位ベクトル $\Delta \bar{\mathbf{x}}(p)$ (式(2))との関係式

$$\Delta \bar{\mathbf{x}}(p) = -\Delta \mathbf{x}(A) + \Delta \mathbf{x}(B) \quad (2)$$

ここに、

$$\Delta \mathbf{x}(A) \equiv \mathbf{u}(A) \quad , \quad \Delta \mathbf{x}(B) \equiv \mathbf{u}(B) \quad (3)$$

- 2) 部材(p)の材軸方向の変化を表すベクトル $\Delta \boldsymbol{\lambda}(p)$ と増分相対変位ベクトル $\Delta \mathbf{l}_3(p)$ との関係式

基準状態における部材(p)の材長と位置ベクトル $\mathbf{x}(A)$ 、 $\mathbf{x}(B)$ の関係は図2より、

$$\ell(p) \boldsymbol{\lambda}(p) = -\mathbf{x}(A) + \mathbf{x}(B) \quad (4)$$

となる。上式をtで微分する。

$$\ell(p) \dot{\boldsymbol{\lambda}}(p) + \dot{\ell}(p) \boldsymbol{\lambda}(p) = -\dot{\mathbf{x}}(A) + \dot{\mathbf{x}}(B) \quad (5)$$

ここに、 $\boldsymbol{\lambda}(p)$ は部材(p)の材軸方向を示す単位ベクトルであるから式(6)が成立する。

$$\boldsymbol{\lambda}(p)^T \boldsymbol{\lambda}(p) = 1 \quad (6-1)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(p)^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}(p) = 0 \quad (6-2)$$

部材(p)の伸縮 $\Delta \ell(p) = \dot{\ell}(p) \Delta t$ は式(5)の両辺に左から $\boldsymbol{\lambda}(p)^T$ を掛けて、式(2)と式(6-1, 2)を用いると次式で表せる。

$$\Delta \ell(p) = \boldsymbol{\lambda}(p)^T \Delta \bar{\mathbf{x}}(p) \quad (7)$$

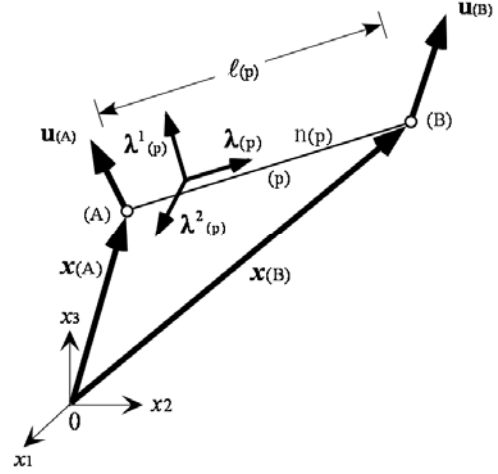
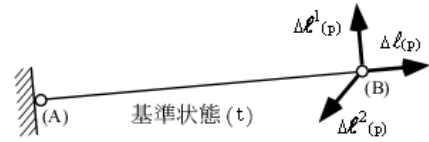
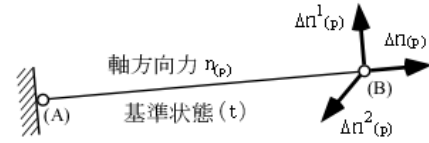


図2 幾何学的関係式に用いる部材の記号(基準状態)



(a) 部材の相対変位



$\Delta n^1(p)$ 、 $\Delta n^2(p)$: 軸方向力の方向変化による二次応力

(b) 部材応力の記号

図3 増分間における記号(基準状態)

部材(p)の増分回転により生じる材軸の方向余弦ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(p)$ に直交するベクトル $\Delta \boldsymbol{\lambda}(p)$ (式(6-2)参照)は、式(5)に式(2)と式(1-2)を適用すると、

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}(p) = \frac{1}{\ell(p)} \Delta \bar{\mathbf{x}}(p) - \frac{\Delta \ell(p)}{\ell(p)} \boldsymbol{\lambda}(p) \quad (8)$$

上式右辺第2項 $\Delta \ell(p)$ に式(7)を代入し、整理すると式(9)を得る。

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}(p) = \frac{1}{\ell(p)} (\mathbf{I}_3 - \boldsymbol{\lambda}(p) \boldsymbol{\lambda}(p)^T) \Delta \bar{\mathbf{x}}(p) \quad (9)$$

式(9)右辺 $\mathbf{I}_3$ は(3×3)の単位マトリックスである。

$\mathbf{I}_3$ は基準状態の方向余弦ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(p)$ と $\boldsymbol{\lambda}^1(p)$ および $\boldsymbol{\lambda}^2(p)$ (図2)を用いると、

$$\mathbf{I}_3 = \boldsymbol{\lambda}(p) \boldsymbol{\lambda}(p)^T + \boldsymbol{\lambda}^1(p) \boldsymbol{\lambda}^1(p)^T + \boldsymbol{\lambda}^2(p) \boldsymbol{\lambda}^2(p)^T + \dots \quad (10)$$

であるから $\Delta \boldsymbol{\lambda}(p)$ は、

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}(p) = \frac{1}{\ell(p)} \left(\boldsymbol{\lambda}^1(p) \boldsymbol{\lambda}^1(p)^T + \boldsymbol{\lambda}^2(p) \boldsymbol{\lambda}^2(p)^T \right) \Delta \bar{\mathbf{x}}(p) \quad (11)$$

で表せる。式(11)右辺において

$$\Delta \ell^1(p) = \boldsymbol{\lambda}^1(p)^T \Delta \bar{\mathbf{x}}(p) \quad (12-1)$$

$$\Delta \ell^2(p) = \boldsymbol{\lambda}^2(p)^T \Delta \bar{\mathbf{x}}(p) \quad (12-2)$$

とおくと、 $\Delta \ell^\alpha(p) (\alpha=1,2)$ は基準状態の材軸に直交する2方向の増分相対変位を表す。部材(p)の方向余弦ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(p), \boldsymbol{\lambda}^1(p), \boldsymbol{\lambda}^2(p)$ は、まとめて $\boldsymbol{\Lambda}(p)$ で表す。

$$\boldsymbol{\Lambda}(p) = [\boldsymbol{\lambda}(p), \boldsymbol{\lambda}^1(p), \boldsymbol{\lambda}^2(p)]_{(3 \times 3)} \quad (13)$$

式(7)と式(12-1, 2)の増分相対変位成分はまとめて

$$\Delta \mathbf{I}_3(p)^T = \{\Delta \ell(p), \Delta \ell^1(p), \Delta \ell^2(p)\} \quad (14)$$

で表し、 $\boldsymbol{\Lambda}(p)$ を使うと次式で表せる。

$$\Delta \mathbf{I}_3(p) = \boldsymbol{\Lambda}^T(p) \Delta \bar{\mathbf{x}}(p) \quad (15)$$

$\Delta \boldsymbol{\lambda}(p)$ (式(11)) は式(12-1, 2)を用いると、

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}(p) = \frac{1}{\ell(p)} [\boldsymbol{\lambda}^1(p), \boldsymbol{\lambda}^2(p)] \begin{bmatrix} \Delta \ell^1(p) \\ \Delta \ell^2(p) \end{bmatrix} \quad (16)$$

次に、 $\Delta \boldsymbol{\lambda}(p)$ (式(8)) に伸縮 $\Delta \ell(p)$ を無視すると次のように成る。

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\lambda}(p) &= \frac{1}{\ell(p)} \Delta \bar{\mathbf{x}}(p) \left(\equiv \frac{1}{\ell(p)} \mathbf{I}_3 \Delta \bar{\mathbf{x}}(p) \right) \\ &= \left[\boldsymbol{\lambda}(p) \boldsymbol{\lambda}(p)^T + \boldsymbol{\lambda}^1(p) \boldsymbol{\lambda}^1(p)^T \right. \\ &\quad \left. + \boldsymbol{\lambda}^2(p) \boldsymbol{\lambda}^2(p)^T \right] \Delta \bar{\mathbf{x}}(p) \\ &= \frac{1}{\ell(p)} \boldsymbol{\Lambda}(p) \Delta \mathbf{I}_3(p) \end{aligned} \quad (17)$$

3.2 力の釣合式

3.2.1 伸縮を考慮するとき (トラス)

図4は基準状態における釣合式に用いる記号を示す。 $n(p)$ は軸方向力(引張力を正とする)を、 $\mathbf{f}(A, p), \mathbf{f}(B, p)$ は材端(A)と(B)の材端力ベクトルを表す。

本項では、次の2式を記述する。

1) 材端力ベクトル $\mathbf{f}(A, p), \mathbf{f}(B, p)$ と $n(p)$ との関係式

2) 増分材端力ベクトル $\Delta \mathbf{f}(A, p), \Delta \mathbf{f}(B, p)$ と部材(p)

の増分応力ベクトル $\Delta \mathbf{n}_3(p)^T = \{\Delta n(p), \Delta n^1(p), \Delta n^2(p)\}$ (図3(b)) との関係式

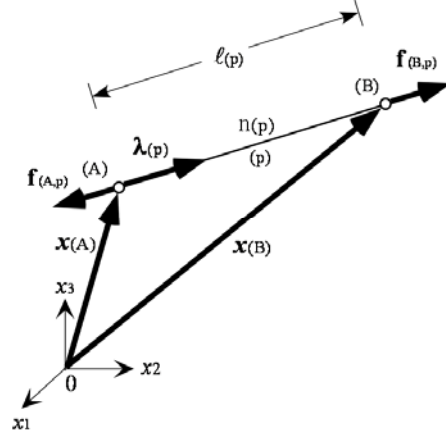


図4 力学的関係式に用いる部材の記号 (基準状態)

部材(p)の材端力ベクトル $\mathbf{f}(A, p), \mathbf{f}(B, p)$ は、軸方向力 $n(p)$ と材端(A)を始点とする方向余弦ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(p)$ を用いて、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}(A, p) \\ \mathbf{f}(B, p) \end{bmatrix} = n(p) \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\lambda}(p) \\ \boldsymbol{\lambda}(p) \end{bmatrix} \quad (18)$$

である。上式に式(1-1, 2)を適用する。

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{f}(A, p) \\ \Delta \mathbf{f}(B, p) \end{bmatrix} = \Delta n(p) \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\lambda}(p) \\ \boldsymbol{\lambda}(p) \end{bmatrix} + n(p) \begin{bmatrix} -\Delta \boldsymbol{\lambda}(p) \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}(p) \end{bmatrix} \quad (19)$$

伸縮 $\Delta \ell(p)$ を考慮した増分釣合式は、式(19)右辺第2項の $\Delta \boldsymbol{\lambda}(p)$ に式(16)を代入し整理すると次式のように表せる。

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{f}(A, p) \\ \Delta \mathbf{f}(B, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\lambda}(p) & -\boldsymbol{\lambda}^1(p) & -\boldsymbol{\lambda}^2(p) \\ \boldsymbol{\lambda}(p) & \boldsymbol{\lambda}^1(p) & \boldsymbol{\lambda}^2(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta n(p) \\ \Delta n^1(p) \\ \Delta n^2(p) \end{bmatrix} \quad (20)$$

式(20)右辺第2項において、

$$\begin{bmatrix} \Delta n^1(p) \\ \Delta n^2(p) \end{bmatrix} = \frac{n(p)}{\ell(p)} \begin{bmatrix} \Delta \ell^1(p) \\ \Delta \ell^2(p) \end{bmatrix} \quad (21)$$

である。部材(p)の増分釣合式(式(20))は、右辺に式(22)記号を用いると式(23)となる。

$$\Delta \mathbf{n}_3(p)^T = \{\Delta n(p), \Delta n^1(p), \Delta n^2(p)\} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{f}(A, p) \\ \Delta \mathbf{f}(B, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\Lambda}(p) \\ \boldsymbol{\Lambda}(p) \end{bmatrix} \Delta \mathbf{n}_3(p) \quad (23)$$

3.2.2 伸縮を無視するとき (不安定剛体トラス)

$\Delta \boldsymbol{\lambda}(p)$ に伸縮 $\Delta \ell(p)$ を無視した増分釣合式は、式(17)を増分間の釣合式(式(20))に用いるとき

$\Delta \mathbf{n}_3(p)$ (式(22)) の $\Delta \mathbf{n}(p)$ を式(24-1) の $\Delta \tilde{\mathbf{n}}(p)$ に置き換えればよい。

$$\Delta \tilde{\mathbf{n}}(p) = \frac{n(p)}{\ell(p)} \Delta \ell(p) \quad (24-1)$$

$$\Delta \mathbf{n}(p) = \Delta \tilde{\mathbf{n}}(p) \quad (24-2)$$

式(24-1) から分かるように軸方向力(存在応力) $n(p)$ が引張力のとき、正の軸剛性 $n(p)/\ell(p)$ が付加される。つまり解析上、伸縮 $\Delta \ell(p)$ は生じるので $\Delta \tilde{\mathbf{n}}(p)$ はその拘束力である。グリーンひずみを用いるラグランジ表現では、 $\Delta \tilde{\mathbf{n}}(p)$ は表れない。つまり、基本関係式は状態量を客観的に評価するオイラー表現を包含している。釣合形状の材長は、拘束力 $\Delta \tilde{\mathbf{n}}(p)$ により初期状態($t=0$)の材長を近似できることを本報(その2)で数値検証する。

3.2.3 伸縮を考慮しかつ軸方向力を一定値とするとき

(ケーブルネット)

軸方向力 $n(p)$ を一定値とすると、増分釣合式(式(20))は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{f}_{(A,p)} \\ \Delta \mathbf{f}_{(B,p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda(p) & -\lambda^1(p) & -\lambda^2(p) \\ \lambda(p) & \lambda^1(p) & \lambda^2(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta n^1(p) \\ \Delta n^2(p) \end{bmatrix} \quad (25)$$

上式は式(20)の $\Delta \mathbf{n}(p)$ を零としたものであるから応力境界値問題として解を与える。これが応力法の利点である。また、応力法は張力を指定するケーブルネットの形態解析理論として正統である。

3.3 構成式

柔性マトリックスを $\mathbf{S}_3(p)$ で表す。 $\Delta \mathbf{I}_3(p)$ (式(14)) と $\Delta \mathbf{n}_3(p)$ (式(22)) の関係式は、増分釣合式中の二次応力(式(21)と式(24-1, 2))より定まる。**3.2.1**~**3.2.3** はまとめて次式で表せる。

$$\Delta \mathbf{I}_3(p) = \mathbf{S}_3(p) \Delta \mathbf{n}_3(p) \quad (25)$$

3.3.1 伸縮を考慮するとき

ヤング係数を E 、断面積を $A(p)$ とする。式(25)の $\mathbf{S}_3(p)$ は式(21)を用いて次式となる。

$$\mathbf{S}_3(p) = \begin{bmatrix} \frac{\ell(p)}{EA(p)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ell(p)}{n(p)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ell(p)}{n(p)} \end{bmatrix} \quad (n(p) \neq 0) \quad (26)$$

3.3.2 伸縮を無視するとき

$$\mathbf{S}_3(p) = \begin{bmatrix} \frac{\ell(p)}{n(p)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ell(p)}{n(p)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ell(p)}{n(p)} \end{bmatrix} \quad (n(p) \neq 0) \quad (27)$$

3.3.3 伸縮を考慮しかつ軸方向力を一定値とするとき

$$\mathbf{S}_3(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ell(p)}{n(p)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ell(p)}{n(p)} \end{bmatrix} \quad (n(p) \neq 0) \quad (28)$$

軸方向力 $n(p)$ が零のときは部材回転との連成が起こらないから、増分相対変位ベクトル $\Delta \mathbf{I}_3(p)$ (式(14)) 中の $\Delta \ell^\alpha(p)$ ($\alpha=1,2$) は他部材との従属関係により生じる。式(26)はケーブルネットの釣合形状(設計形状)が得られた後、構造材料を定めたときの自己釣合系の形態解析および荷重が作用するときの軸力変動と変形解析(構造解析)に使う。

4. あとがき

1) 三つの基本関係式は状態量を客観的に評価するオイラー表現を包含している。

2) また、トラス・ケーブルネットの形態解析と構造解析は一つ式で系統的に表すことができる。

3) 応力境界値問題の形態解析が可能である。

なお、系全体の基本関係式および応力の余解を求める変形の適合条件式は本報(その2)に示す。

参考文献

- 1) 田中尚, 半谷裕彦: 不安定トラスの剛体変位と安定化条件, 日本建築学会論文報告集, NO. 356, pp. 35-42, 1985. 10
- 2) 日本建築学会編: 応用力学シリーズ5 構造形態の解析と創生, 培風館, 1998. 12
- 3) 半谷裕彦, 川口健一: 形態解析 一般行列の応用, 培風館, 1991. 4
- 4) 小野 薫: 剛節ラーメンの解法に於ける適合条件について, 建築学会大会論文, 1934. 4
- 5) 二見秀雄: 建築雑誌, VOL. 72, NO. 853, p. 7, 1957
- 6) 小野 薫: 撓角法, 紀元社出版, 1957
- 7) 齋藤謙次: 不規則な剛節ラーメンに対する組織的解法, 建築学会大会論文集, 1935. 4
- 8) 齋藤謙次: 建築構造力学, 理工図書, 1935. 4
- 9) 川島 晃: 変位法および応力法による立体骨組の構造解析に関する研究, 日本大学博士論文, 2006. 3