混合平均に基づくウェイト推定法

日大生産工(院)　○長澤　孝憲
日大生産工　　篠原　正明

1　はじめに

我々が意思を決定するときの分析手法の中の一つとしてAHPによる意思決定システムが存在する。そのAHPにおいてのウェイトを推定する手法として、一般化平均が存在する、一般化平均とは、算術平均・調和平均そして幾何平均といった３つの平均をあわせた総称のことである。ウェイト推定は一般化平均とは別の手法を提案した。その手法は、混合平均である、本論は、この混合平均に基づくウェイトを定義し、その定義を利用して、AHPや「Arrowの背理」[1]に適用する。

2　混合平均の定義

混合平均とは、算術平均・調和平均そして幾何平均を基に「３つの平均から２つの平均を組み合わせて作る平均」のことをさす。３つの平均から２つの平均を組み合わせるとは、算術幾何平均、算術調和平均、そして幾何調和平均のことである。この組み合わせた３つの平均を混合平均と定義する。まず算術幾何平均とは、算術平均を数列表現したのと幾何平均を数列表現した二つの異なる数列を、繰り返し計算した極限のことをさす。残りの算術調和平均、幾何調和平均も同様のことをさす。次に、この混合平均を数学的に定義する。

3　混合平均の数学的表現

算術平均の数列を$\{a_{n+1}\}$、幾何平均の数列を$\{b_{n+1}\}$とすると、算術幾何平均は

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}, \quad a_0 = \alpha \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_0 = \beta \end{cases} \qquad (3・1)$$
$$(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

同様にして、算術平均の数列を$\{a_{n+1}\}$、調和平均の数列を$\{b_{n+1}\}$とすると、調和幾何平均は

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}, \quad a_0 = \alpha \\ b_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_0 = \beta \end{cases} \qquad (3.2)$$
$$(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

であらわす。最後に、調和平均の数列を$\{a_{n+1}\}$、幾何平均の数列を$\{b_{n+1}\}$とすると、調和幾何平均は

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad a_0 = \alpha \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_0 = \beta \end{cases} \qquad (3.3)$$
$$(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

であらわす、この(3・1)～(3・3)式のそれぞれの極限値$\{a_n\}$と$\{b_n\}$は、同じ極限値を持つことを次にしめす。

定理1.

$0 \le b_n \le a_n$ に対して

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}, \quad a_0 = \alpha \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_0 = \beta \end{cases}$$
$$(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

と定義された数列$\{a_n\}$と数列$\{b_n\}$に$n \to \infty$ としたとき$\{a_n\}$と$\{b_n\}$は同じ極限値を持つ

【証明】

相加平均・相乗平均より、すべての$n \in N$で$0 \le b_n \le a_n$が成り立つ。

Weight Estimation Method based on Mixture Average

Takanori NAGASAWA and Masaaki SHINOHARA

$$b_n = \sqrt{b_n b_n} \leq \sqrt{a_n b_n} = b_{n+1} \quad \cdots ①$$

$$a_n = \frac{a_n + a_n}{2} \geq \frac{a_n + b_n}{2} = a_{n+1} \quad \cdots ②$$

よって、

$$0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$$
$$\leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n \leq \cdots \leq a_2 \leq a_1$$

となり、数列$\{a_n\}$と$\{b_n\}$は有界な単調数列である。有界な単調数列は収束するから、数列$\{a_n\},\{b_n\}$は共に収束する。それぞれの極限値をα,βとおくと

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

よって

$$\alpha = \beta$$

(Q.E.D.)

算術調和平均、幾何調和平均も同様にして示すことができるが、省略する。

この混合平均を一般化した形として、第一種混合平均や第二種混合平均を数学的定義しておく。

４　第一種・二種混合平均の数学的定義

第一種混合平均とは、任意の重みに対しての算術幾何平均・調和幾何平均・算術調和平均の総称である。一方、第ニ種混合平均とは、任意の重みに対して、算術・幾何・調和の平均の総称である。

まず、第一種混合平均を数学的に定義する。数列$\{a_n\},\{b_n\}$に対して重み$w_i\,(i=1,2,\cdots n)$を与えると第一種算術幾何平均は(4.1)式となり第一種調和幾何平均は(4.2)式となる。

$$\begin{cases} a_{n+1} = w_1 a_n + w_2 b_n, \quad a_0 = \alpha \\ b_{n+1} = w_1 a_n + w_2 b_n, \ b_0 = \beta \\ w_1 + w_2 = 1 \\ \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n b_n}{w_1 b_n + w_2 a_n}, \quad a_0 = \alpha \\ b_{n+1} = a_n^{w_1} b_n^{w_2}, \ b_0 = \beta \\ w_1 + w_2 = 1 \\ \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \end{cases} \tag{4.2}$$

と表わせ、第一種算術調和平均は(4.1)式と(4.2)式からわかるので省略する。

ここで$w_1 = w_2 = 0.5$を与えると、(3.1)～(3.3)式の混合平均になる。次に、第二種混合平均は(4.3)式となる。

$$\begin{cases} a_{n+1} = w_1 a_n + w_2 b_n + w_3 c_n, \ a_0 = \alpha \\ b_{n+1} = a_n^{w_1} b_n^{w_2} c_n^{w_3}, \ b_0 = \beta \\ c_{n+1} = \dfrac{a_n b_n c_n}{w_1 b_n c_n + w_2 a_n c_n + w_3 a_n b_n}, c_0 = \gamma \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \end{cases} \tag{4.3}$$

と定義された数列$\{a_n\}$と数列$\{b_n\}$、そして数列$\{c_n\}$に$n\to\infty$　としたとき$\{a_n\}$と$\{b_n\}$、そして$\{c_n\}$は同じ極限値を持つことがわかっているが、今回は証明を省略する。これらの平均が収束することが分かったが、収束するための速度を調べる必要がある。この収束速度によってこの混合平均が使えるかどうか決まるのである。

５．混合平均の収束速度

この混合平均が収束速度を数学的に示すのと数値計算上の両方向から調べてみる。

5.1　数学的アプローチ

混合平均の中の算術幾何平均の収束速度を調べる。算術平均の数列を$\{a_{n+1}\}$、幾何平均の数列を$\{b_{n+1}\}$とすると

$$|a_{n+1}-b_{n+1}|=\left|\frac{a_n+b_n}{2}-\sqrt{a_nb_n}\right|$$
$$=\left|\frac{a_n+b_n-2\sqrt{a_nb_n}}{2}\right|$$
$$=\frac{\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\right)^2}{2}\cdot\frac{\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}\right)^2}{\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}\right)^2}$$
$$=\frac{(a_n-b_n)^2}{2\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}\right)^2}$$
$$|a_{n+1}-b_{n+1}|\le C(a_n-b_n)^2\,(C\in\Re)$$

よって、算術幾何平均は2次収束することより、収束するのは速いことがわかる。これ以外の調和幾何平均･算術調和平均も収束するのが速いと分かっているので省略する。

5.2　数値計算によるアプローチ

算術幾何平均･調和幾何平均･算術調和平均に同じ初期値を与え各平均の収束を調べる。

5.2.1　算術幾何平均

算術平均の初期値を$\alpha=20$として、幾何平均の初期値を$\beta=100$とし、また$\varepsilon=10^{-10}$と与えたとき$a_3=b_3=52.08016381$となり、図1のようになった。

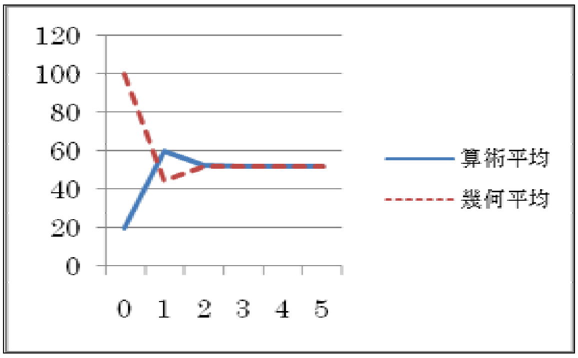

図１.算術幾何平均の収束

5.2.2　算術調和平均

算術平均の初期値を$\alpha=20$として、調和平均の初期値を$\beta=5$とし、また$\varepsilon=10^{-10}$と与えたとき$a_3=b_3=10.0$となり、図2になった。

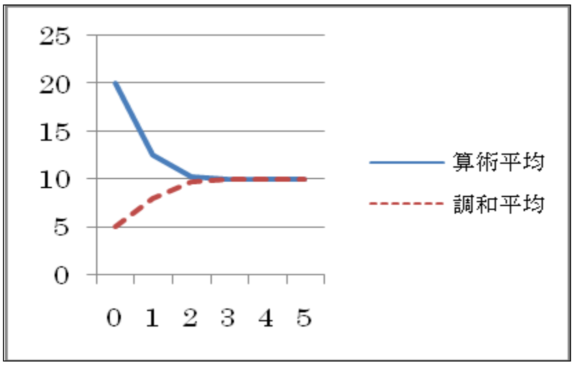

図2.算術調和平均の収束

5.2.3　調和幾何平均

算術平均の初期値を$\alpha=20$として、調和平均の初期値を$\beta=5$とし、また$\varepsilon=10^{-10}$と与えたとき$a_3=b_3=10.0$となり、図3になった。

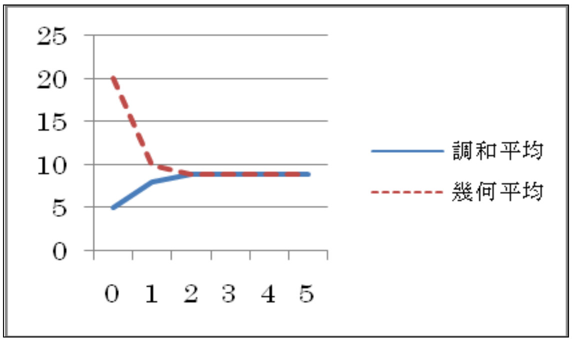

図3.調和幾何平均の収束

各平均の収束は、数学的アプローチや数値計算からの両方向から見ても収束するのが速いのがわかったので混合平均は一般化平均と同じように使えるだろう。この混合平均を利用して、AHPやArrowの背理に適用する。

6　混合平均を利用したAHP

従来のAHPでは、代替案間で評価を行い、一対比較行列を構成し、ウェイトベクトルを一般化平均（算術平均･幾何平均･調和平均）などの手法を利用して解いた。しかし、今回はウェイトベクトルを、混合平均（算術幾何平均･算術調和平均･幾何調和平均）や第2種混合平均を利用して算出する。

6.1　混合平均の利用

一対比較行列を$A(n,n)=\{a_{ij}\}$としたとき算術幾何平均（混合平均）のアルゴリズムは以下のようになる。

（ Step 1 ）

i 行に対して算術平均の初期値を $\alpha \leftarrow a_{i1}$ として、幾何平均の初期値を $\beta \leftarrow a_{i2}$ として収束するまで計算を繰り返す。

（ Step 2 ）

収束した値を γ とすると $\alpha \leftarrow \gamma$、そして $\beta \leftarrow a_{i3}$ として収束するまで計算を繰り返す。

（ Step 3 ）

i 行の計算が終わったら、$i \leftarrow i+1$ にして(step 1)に戻る。全ての行のウェイトを求めるまで計算を続ける。

第2種混合平均においても同様の方法で計算をする。

6.2　混合平均を利用した数値計算例

一対測定値を $a_{12} = 2,\ a_{13} = 3,\ a_{23} = 4$ としたとき

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 4 \\ 1/3 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow w = \begin{pmatrix} 2.15892 \\ 2.02219 \\ 0.59068 \end{pmatrix}$$

と一対比較行列Aを構成し、各行を算術幾何平均で計算をするとウェイトベクトル w は上のようになり、主固有値やC.I.値は表1になった。

表１.各平均の主固有値やC.I.値

	主固有値	C.I.値
幾何平均	3.10784733	0.053923667
算術平均	3.108651451	0.054325726
算術幾何平均	3.156845511	0.078422755
第二種混合平均	3.108171803	0.054085901

(4.3)式における第ニ種混合平均の重みは $w_1 = w_2 = w_3$ と設定した。

7　混合平均を利用したArrowの背理

3つの評価基準から3つの代替案、4つの評価基準から 4つの代替案について、混合平均･第一種混合平均･第二種混合平均を利用して循環律が成立しているかどうかを調べる。(4.1)式における重みが等しいとき $w_1 = w_2$ と異なるとき $w_1 \neq w_2$ にわけて調べた。異なるときの重みは $w_1 = 0.3$ $w_1 = 0.7$ と設定した。

表2. 3つの評価基準から3つの代替案の循環律

3×3	$s=3, t=4$	
	$w_1 = w_2$	$w_1 \neq w_2$
算術幾何平均	成立	不成立
算術調和平均	成立	不成立
調和幾何平均	成立	不成立
第二種混合平均	成立	不成立

表3. 4つの評価基準から4つの代替案の循環律

4×4	$s=2, t=3, u=4$	
	$w_1 = w_2$	$w_1 \neq w_2$
算術幾何平均	不成立	不成立
算術調和平均	不成立	不成立
調和幾何平均	不成立	不成立
第二種混合平均	不成立	不成立

8　考察

混合平均･第一種混合平均･第二種混合平均をAHPやArrowの背理に適用した。その結果AHPに対しては、混合平均･第二種混合平均は有効であると考える。しかし、Arrowの背理は予想していた結果が得られなかった。混合平均の定義を改善すべきなのか、それとも混合平均のとりかたを変えるべきなのかなどは、検討する必要がある。

9　今後の課題

今回の混合平均･第一種混合平均･第二種混合平均は、我々が使っていた平均という概念を実数上ののみで説明をしただけである、これを実数から複素数に拡張し、実数の中の「平均」の概念を複素数に発展させ、AHPに適用をさせたい。

参考文献

[1] 長澤孝憲、篠原正明：Arrowに背理に対するAHP分析、2007年度日本大学生産工学部学術講演会学会論文集，，pp.57-60(2007.12)