AHP図式による仮説検定

―ベイズ定理による解釈―

日大生産工　　◯篠原　正明
日大生産工(院)　　茂木　渉

1. はじめに

母数仮説検定の枠組をAHP枠組でとらえるアプローチを提起する。ベイズ定理(あるいはベイズ規則)についても、「原因から結果への実現頻度確率と結果から原因への信念推定確率の均衡化」というAHP図式にもとづく解釈を提起し、ベイズ定理の一般化を試みた[1,2,など]が、AHP図式のようにグラフィカルな表現法を導入することにより、仮説検定に関しても、新しい視点にもとづく仮説検定アプローチを考案する。

2章では、簡単な「コイン投げによる真偽コイン検定問題」を例にとり、AHP図式にもとづくベイズ定理の立場から、この仮説検定問題を分析する。3章では、AHP図式にもとづく仮説検定枠組の構成を考察する。

2. コイン投げによる真偽コイン検定問題のベイズ流アプローチ

以下に仮説検定問題を考える。

コイン投げで表の出る確率を p とする時、真コインは $p=0.5$ で、偽コインは $p=1$ とする。注目するコインの真偽を調べるため、n 回のコイン投げを試行する。表が i 回出る確率 $\mathrm{P}(i)$ は二項分布として次式で与えられる。

$$\mathrm{P}(i) = {}_n\mathrm{C}_i\, p^i (1-p)^{n-i} \tag{1}$$

$$\text{帰無仮説：}\quad \mathrm{H}_0 : p = 0.5 \quad (\text{コインは真}) \tag{2}$$

$$\text{対立仮説：}\quad \mathrm{H}_1 : p = 1.0 \quad (\text{コインは偽}) \tag{3}$$

この仮説検定では、コインは偽($p=1$)であるとの主張が正しいことを示すために、コインは真($p=0.5$)であるという主張(帰無仮説)を検証するという立場をとる。試行回数 $n=3$ とした場合の $\mathrm{P}(i)$ ($p=0.5$ と $p=1$) を表1に、2つの仮説 H_0 と H_1 を原因(評価基準)、表の出現回数 i を結果(代替案)としたAHP図式を図1に示す。ここで、H_0 と H_1 の発生確率を $x, 1-x$ とする。

表1. 二項分布に従う表の出現確率

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$p=0.5$ での $\mathrm{P}(i)$	1/8	3/8	3/8	1/8
$p=1$ での $\mathrm{P}(i)$	0	0	0	1

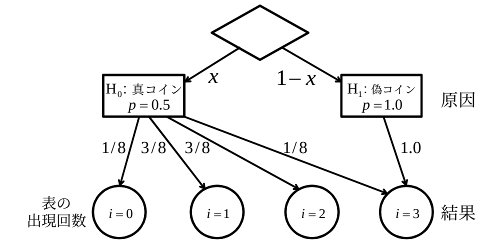

図1. AHP図式によるコイン投げ($n=3$)仮説検定

原因として位置づけられる2つの仮説 $\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1$ の発生確率を $x, 1-x$ と未知数にしたのは、どちらかの仮説が妥当かを決めるのが仮説検定の課題だからである。

以下に、ベイズ定理のAHP図式(例えば[1])に従って、表の出現回数が3回中3回の結果が生じた時に、原因が真コイン(H_0)と偽コイン(H_1)の逆推定確率を評価する。

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_0 : \text{真コイン} \mid i=3) = x/(8-7x) \tag{4}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_1 : \text{偽コイン} \mid i=3) = (8-8x)/(8-7x) \tag{5}$$

仮説検定の枠組では、帰無仮説(H_0:コインは真)のもとで、可能性が非常に小さい現象が発生したと認識する基準確率 s を有意水準と呼び、帰無仮説 H_0 を棄却する判断基準としているが、ここでのベイズ流アプローチでは、(4)と(5)の逆推定確率値の大小によって判断する。すなわち、帰無仮説 H_0 を棄却することは、表が3回出現時にコインが真である確率(4)、$\mathrm{P}(\mathrm{H}_0 :$ 真コイン$\mid i=3)$ が十分に小さいことである。その値を e とすると、次式(6)が成立する必要がある。

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_0 : \text{真コイン} \mid i=3) = e \tag{6}$$

(4)と(6)より帰無仮説 H_0 の出現確率 x は次式(7)で評価できる。

$$x = 8e/(1+7e) \tag{7}$$

例えば、$e=0.01$ で x　0.075 となる。すなわち、コインの表が3回中3回出現した時に、コインが真である逆推定確率値を

Hypothesis Testing via AHP Diagram
―Application of Bayesian Approach―
Masaaki SHINOHARA and Wataru MOGI

(H_0 を棄却するために)十分小さく1%($e = 0.01$)と見積もるならば、帰無仮説 H_0 の発生確率 x は約7.5%($x \quad 0.075$)となり、この発生確率ならば棄却して問題ないと判断するための数値データを提供する。

3. AHP図式にもとづく考察

2章では仮説検定の簡単な例に対して、「評価基準」を「原因」、「代替案」を「結果」と対比させたAHP図式にもとづきベイズ流アプローチを提起した。本章では、(統計的)仮説検定アプローチとベイズ流アプローチ(2章)を比較対比しながら、AHP図式にもとづき仮説検定法を考察する。

3.1. 枠組

仮説検定アプローチでは、本来は否定しようとする(パラメタが一定値など構造が単純な) 帰無仮説 H_0 が成立するとの条件下で統計的には発生がまれな異常事象が出現してれば、H_0 を棄却する(従って、対立仮説 H_1 が採択される背理法)。すなわち、原因事象の1つである H_0 を前提とするwhat-if分析である。一般には、H_0 の排反事象となる(一般には構造が複雑な)対立仮説 H_1 が成立する条件下での統計計算は不要である。

一方、ベイズ流アプローチでは、H_0 と H_1 を原因事象とし、様々な結果事象を想定する。そして、結果から原因を逆推定し、逆推定確率 $P(H_0 \mid \text{reject}), P(H_1 \mid \text{reject})$ 等を計算し、発生した結果から様々な原因を主観確率にもとづき評価するベイズ分析である。もし、このベイズ流アプローチがすべての仮説検定問題に対して簡単に適用できれば、ベイズ流アプローチの方が客観的であり、優れていると思うが、現実の仮説検定問題にベイズ流アプローチを適用すると、かなり複雑になる。そこで、原因から結果の発生確率 $P(\text{reject} \mid H_0)$ を簡単に計算できるように、帰無仮説 H_0、棄却域 $(H_0\text{reject})$ を巧妙に設計したアプローチが統計的仮説検定であると位置づけられる。

3.2. 有意水準

仮説検定アプローチでは、帰無仮説 H_0 が成立する条件下で異常事象が発生する条件付確率を有意水準とし、判断材料とする。一方、ベイズ流アプローチでは、異常事象が結果として発生した条件下で、帰無仮説 H_0 や対立仮説 H_1 が原因として発生する逆推定確率を計算し、判断材料とする。

3.3. 第1種過誤と第2種過誤

仮説検定アプローチでは、有意水準が第1種過誤に相当する。第2種過誤は対立仮説 H_1 が成立条件下で H_0 が採択される確率であり、いずれの過誤も「原因から結果の発生確率」である。2章の例では、$i = 3$ を異常事象(H_0 棄却域)に、$i = 0{,}1{,}2$ を H_0 採択域とするならば、第1種過誤= $P(i = 3 \mid H_0)$、第2種過誤 $= P(i = 0{,}1{,}2 \mid H_1)$ である。

3.4. 原因と結果

仮説検定アプローチでは、原因事象として帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を想定する。H_0 と H_1 は互いに排反事象であり、一般には H_0 は構造が単純で、H_1 は複雑である。結果事象としては、H_0 棄却域(reject)と H_0 採択域(accept)を想定する(図2参照)。ベイズ流アプローチでは、図2に限定されない。

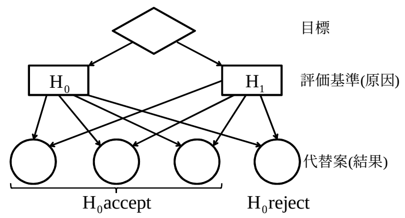

図2. 統計的仮説検定のAHP図式

3.5. 対立仮説の設定法

帰無仮説 H_0 として、例えば、2章の様に単純な「$p = 0.5$」とすると、その排反事象は「$p \neq 0.5$」となるが、連続分布あるいは離散分布にも依存するが、具体的な設定法としては、「$p < 0.5$ or $p > 0.5$」(両側検定)、「$p > 0.5$」(片側検定)、「$p < 0.5$」(片側検定)、「$p = 1.0$」などが考えられる。$p = 0.5$ は真コインに対応し、$p \neq 0.5$ は偽コインに対応するが、想定する状況として、偽コインは表がでやすいという前提では「$p > 0.5$」が、偽コインは100%表がでるという前提では「$p = 1.0$」が対立仮説になる。すなわち、発生する結果に関する立場の相異により、対立仮説が具体的に設定される。

4. おわりに

統計的仮説検定問題において、仮説を原因、標本を結果としたベイズ流アプローチを提起し(2章)、AHP図式にもとづく既存の仮説検定アプローチを再整理し、問題点を考案した(3章)。問題点に対処するアプローチは今後の課題である。

参考文献

[1] 篠原正明：ベイズの定理とマルコフ連鎖と枝確率フロー平衡、第36回日本大学生産工学術講演会数理情報部会論文集、7－17、pp.41－44(2003.12).

[2] 篠原正明、篠原健：マルコフ連鎖上のBayes定理の拡張と一般化、第37回日本大学生産工学術講演会数理情報部会論文集、7－13、pp.35－36　(2004.12).