

2×2 双行列ゲームの放物線焦点解と Nash 交渉解の比較研究

日大生産工 ○篠原正明
情報システム研究所 篠原健

1. はじめに

文献[1]において、2×2 双行列ゲームの非協力実現可能域境界線は放物線であることを示したが、放物線には準線 L と焦点 F が、自然に備わっている。この放物線の焦点 F と準線 L の概念に基づく交渉解として、「放物線焦点解 PFS」を提案し、協力実現可能凸域上での基準点からの利得積最大化により達成される「Nash 交渉解 NBS」と、簡単な例により計算・比較する（2 章）。さらに、放物線焦点交渉解(PFS)の準線の意味（3 章）、放物線焦点解と Nash 交渉解の関係について考察する（4 章）。

2. 放物線焦点交渉解(PFS)の計算例

文献[2]の境界放物線の焦点と準線の陽的表現式を用いて、2 つの例について「放物線焦点解 PFS」を「Nash 交渉解 NBS」と共に計算する。

[例 1] 文献[1]の 3.2 節の例 2・・・

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A=1, B=-1, C=0, D=-4, E=0$ となり、(以降、行列、プレイヤーを **A, B**、スカラーパラメタを A, B などと表記)、これを代入すると、焦点 $F: u=0.5, v=0.5$, 準線 $L: u+v=0$ となる（図 1）。

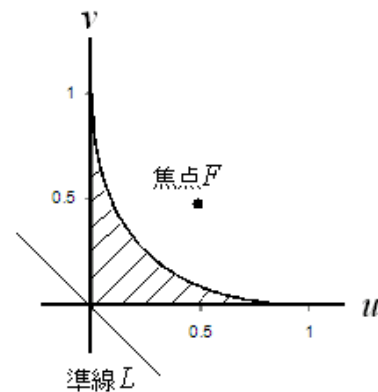


図 1 [例 1] の非協力実現可能域境界線の焦点 F と準線 L

非協力実現可能域と相関戦略により得られる協力実現可能域の放物境界線と準線 $L(u+v=0)$ からの等距離にある妥協点が焦点 $F(u=0.5, v=0.5)$ である。放物境界線は非協力と協力の境界であり、準線は、この例では、零和行列ゲームの（非協力）実現可能域なので、非協力時の基準として、「点」ではなく「線」を考え、その基準線と非協力・協力の境界から等距離に位置する妥協点（あるいは交渉点）として、焦点 F が位置づけられる。すなわち、この例では、放物線焦点交渉解（PFS: Parabolic Focal Bargaining Solution）は、ある種の零和ゲームを基準として、あらゆる非協力・協力

Comparative Study between PFS and NBS for 2×2 Bimatrix Game

Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

の瀬戸際から等距離にある交渉解となる。
この例では、PFS と基準点を($u=0, v=0$)とした NBS は同じであり、両者とも協力実現可能凸域の境界上に存在し、パレート最適性を満足する。

さらに、ナッシュ交渉解 NBS では基準点をどこに選ぶかに、得られる NBS が依存するという、基準点選択の恣意性が問題となるが、放物線焦点交渉解 PFS では、そのような恣意性は存在しない。[例 1 終]

次に、PFS と NBS が必ずしも一致しないことを例 2 により検討する。

[例 2]

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$A_1=a, A_2=0, A_3=0, A_4=0, B_1=b, B_2=-b, B_3=-b, B_4=b$ であり、従って、 $P=-1, Q=1/a, R=1/b$ 。さらに、 $A=b, B=-a, C=0, D=-4ab^2, E=0$ なので、 $\alpha=0, \beta=0, K=-ab^2/(a^2+b^2)^{3/2}$ となり、これらを文献[2]の(28),(29),(30)に代入すると、PFSとして以下を得る。

$$\text{焦点 } F : u=ab^2/(a^2+b^2) \quad (1)$$

$$v=a^2b/(a^2+b^2) \quad (2)$$

$$\text{準線 } L : au+bv=0 \quad (3)$$

一方、NBS は以下の非線形計画問題の解である。

目的関数： $Z=uv \rightarrow$ 最大化 (基準点は $u=0, v=0$ とした)

制約条件： $bu+av=ab$ (パレート最適領域)

ラグランジュ未定乗数法により、

$L(u, v, \lambda) = uv - \lambda (bu + av - ab)$ とし、 $L_u=0, L_v=0, bu+av=ab$ より、NBS として、以下を得る。

$$\text{NBS : } u=a/2, \quad v=b/2 \quad (4)$$

明らかに、 $a=b$ 以外では PFS と NBS は共にパレ

ート最適領域に存在するものの、異なる。
 $a=1, b=2$ とすると、PFS は $F : u_B=4/5, v_B=2/5$, $L : u+2v=0$, NBS は $u_B=0.5, v_B=1$ となり、図 2 に示す。

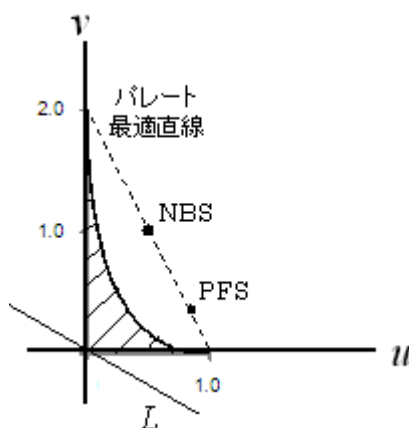


図 2 [例 2]の PFS と NBS

PFS と NBS 共にパレート最適直線上に存在するが、両者は大きく離れていることがわかる。 [例 2 終]

ここで、注目すべきは、 $a < b$ の条件下では、たとえば[例 2]では PFS の交渉解は $u_B=0.8, v_B=0.4$ で、 $u_B > v_B$ となり、プレイヤー A の交渉点利得がプレイヤー B のそれより大きくなっていることである。プレイヤー A は戦略 1 をとり、相手も戦略 1 をとれば、利得 $a=1$ が、一方、プレイヤー B は戦略 2 をとり、相手も戦略 2 をとれば、利得 $b=2$ が獲得出来る時、ありとあらゆる協力・非協力のケースを考えて (協力・非協力の境界線)、それらと準線 (準線の意味については次章参照) の間が常に等距離に位置するような妥協点 (交渉結果) では、プレイヤー A の交渉点利得の方がプレイヤー B の交渉点利得よりも大きくなる。まとめると、[例 2]の利得行列の下では (すなわち、A は (1,1) 要素 $=a$ のみが非零、B は (2,2) 要素 $=b$ のみが非零)、PFS 交渉解では、(1), (2) に示すように、 $a < b$

ならば、 $u_B > v_B$ となり、弱者(プレイヤーA)が交渉の結果として、勝者となる。…これを「弱者の勝利」あるいは「弱者の脅迫」と呼ぼう(これについては4章(4.1)、(4.2)で検討)。

3. 放物線焦点交渉解(PFS)の準線の意味

前章[例1]では、交渉での基準としてNBSでの点ではなく、PFSでは線が、自然に選ばれ、 $u+v=0$ という零和ゲームでの実現可能域という意味を持つことを示した。

前章[例2]では、準線Lは $au+bv=0$ で表された。ここで、 a はプレイヤーAの利得行列Aの(1,1)要素で、 b はプレイヤーBの(2,2)要素である。一方で、パレート最適直線は、 $bu+av=ab$ となり、準線Lとは平行ではない。パレート最適直線は、 $(u/a)+(v/b)=1$ とも表現できるので、プレイヤーAの(1,1)での利得 a とプレイヤーBの(2,2)での利得 b の配分過程とも考えられる。ところで、準線Lは $(u/b)+(v/a)=0$ とも表現できるので、プレイヤーBの利得 b で正規化したプレイヤーAの期待利得 u (すなわち u/b) とプレイヤーAの利得 a で正規化したプレイヤーBの期待利得 v (すなわち v/a) の和が零となるという意味での零和ゲームに相当する。

プレイヤーAはプレイヤーBの(2,2)要素利得 $=b$ の大小を考慮したもとで(あるいは、基準にして)、自分の期待利得 u をスケールリングする。プレイヤーBの(2,2)要素利得 $=b$ が大きければ大きいほど、プレイヤーAは自分の期待利得 u を相対的に高く評価する。プレイヤーBについても同様に、プレイヤーAの(1,1)要素利得 $=a$ との相対評価により、自分の期待利得 v を評価する。それぞれの

相対評価値 u/a と v/b が零和となる状況を基準に協力・非協力のあらゆる局面を考慮した時の基準点として、1つの点ではなく、点集合としての準線が存在すると、PFSでは主張する。

4. 考察

(4.1) 「弱者の勝利」

放物線焦点交渉解(PFS)では、協力・非協力のあらゆる局面を考慮しており、2章[例2]の双行列ゲームでは、焦点となるPFSについては「弱者の勝利」が、準線については「他者との相対評価期待利得での零和状態」が基準となることが判明した。果たして、現実の交渉ゲームにおいてこのような状況が存在しているだろうか？離婚調停などでは相手の収入等との相対比較により慰謝料が決まったり、国際紛争などでは交渉段階では、結構、弱者側が粘り、強者側は妥協するもので(「金持ち喧嘩せず」、真剣に交渉ゲームが実行されれば、PFSでの交渉結果は、現実頻発していると観測できる。

(4.2) 非零和ゲーム vs 零和ゲーム

非零和ゲームのモデルが発生するのは、プレイヤーの利害関係の1局面に注目するからである。より大局的な視点に立てば、零和ゲームによるモデル化が本質的である。例えば、3章[例2]ではプレイヤーAが(1,1)で利得 a 円を獲得すれば、複式簿記理論を持ち出さなくても、誰かの何処かの勘定項目に損失 a 円が発生しているはずである。前述の「弱者の勝利」あるいは「弱者の脅迫」が交渉結果として発生するのは、より大局に存在する零和ゲームによる効果であると考えられる。

(4.3) NBS固有の欠点である基準点の選択の恣意性

[例2]の $u=0, v=0$ を基準点としたNBSは、 $u=a/2, v=b/2$ であり、一見すると、各プレイヤーが自分の最高利得の半分を獲得するという常識的な交渉結果である。

しかし、この交渉結果は交渉決裂時基準点として原点($u=0, v=0$)を選択するという条件付である。基準点として($u=at, v=bt$; パラメタ t)を選択しても、同じNBS解($u=a/2, v=b/2$)が得られるが、他の基準点を選択すると、他の交渉解が得られてしまい、NBS固有の欠点である「基準点の選択の必要性とその恣意性」が存在する。

(4.4)NBSを交渉結果とする基準点

前節 4.3 では、NBS固有の欠点である「基準点の選択の必要性とその恣意性」を示したが、それでは[例2]においてどのような基準点(u_R, v_R)を選択すれば、パレート最適直線 $bu+av=ab$ 上の交渉結果(α, β)に到達するであろうか？

[定理4.1]

基準点($u_R=\alpha+at, v_R=\beta+bt$; t はパラメタ)に対するNBSは、交渉結果として(α, β)を持つ。但し、 $b\alpha+a\beta=ab$ (5)。

(証明)

ラグランジュ関数 L は、 $L=(u-u_R)(v-v_R)+\lambda(bu+av-ab)=(u-\alpha-at)(v-\beta-bt)+\lambda(bu+av-ab)$ となり、 $L_u=0$ と $L_v=0$ より、 $v-\beta-b(t-\lambda)=0$ と $u-\alpha-a(t-\lambda)=0$ 、整理すると、 $a(v-\beta)=b(u-\alpha)$ (6)となる。(6)式と等号制約条件式 $bu+av-ab=0$ (7)と交渉結果がパレート最適直線上に存在する条件(5)の3つの式を連立すると、NBSとして $u=\alpha, v=\beta$ を得る。(Q.E.D.)

ところで、基準点($u_R=\alpha+at, v_R=\beta+bt$)で t

はパラメタであり、これを消去すると、直線式; $(v_R-\beta)/b=(u_R-\alpha)/a$ (8)を得る。すなわち、交渉結果NBS(α, β)通過する傾き「 b/a 」の直線上の任意の点を基準点としたNBSの交渉点は(α, β)となる。

5. おわりに

2×2 双行列ゲームの非協力実現可能境界線が放物線であることにより、自然に(必然的に)放物線に備わっている「焦点」と「準線」という数学概念が、協力ゲームの交渉解における「交渉到達点」と「交渉時の基準領域」に対応するという新しい交渉解の概念「放物線焦点解PFS」を提案した。PFSをNash交渉解(NBS)と比較すると、両者の交渉到達点は必ずしも一致せず、PFSでは、NBSでの基準点に依存する恣意性の問題点が存在しない、基準点ではなく基準領域という概念を持つ、などの特徴を持つ。

PFSとNBSの交渉結果の妥当性比較研究に関しては、各プレイヤー毎の利得行列の持つ意味、非零和ゲームが発生しているより大枠の零和ゲーム、などゲーム理論のモデル化に際しての本質的議論(4.1),(4.2)が必要であると思う。

参考文献

- [1] 篠原正明、篠原健：2×2 双行列ゲームの非協力実現可能域境界線は放物線、平成19年度日本大学生産工学部第40回学術講演会・数理情報部会講演論文集, pp.39-42(2007.12).
- [2] 篠原正明、篠原健：2×2 双行列ゲーム境界放物線の焦点と準線の陽的表現、平成20年度日本大学生産工学部第41回学術講演会・数理情報部会講演論文集(2008.12).