

# 複式簿記理論の位相幾何学的考察(その1)

## - カットセット解析 -

日大生産工      ○篠原 正明  
情報システム研究所      篠原 健

### 1. はじめに

「人類の生んだ最大の発明」、「絶対的完全原理」、「資本主義の記念塔」、「2つの完全科学のうちの1つ」等々とその理論美に関しては、15世紀(あるいはそれ以前)の複式簿記発明以来、多くの哲学者、数学者、経済学者などにより称賛され続けている。しかしながら、複式簿記の理論構造についてはすべてが解明しつくされているわけではない点が今日においても指摘されている。本論文では、この複式簿記について、勘定ノートと取引アークからなる取引ネットワークを考え、そのネットワークにおける取引フローについて位相幾何学的考察を行う。

### 2. 取引ネットワーク

ある期間内における勘定間の取引にもとづく金銭の流れを表現する取引ネットワーク  $G(N,A;T)$  を考える。 $N$  は節点集合で、節点は勘定ノードに対応する。又、 $A$  は有向枝集合で、枝は勘定間取引アークに対応する。有向枝  $(i,j)$  は、勘定ノード  $i$  から勘定ノード  $j$  への取引でその重み  $t_{ij}$  はその取引額である ( $T=\{t_{ij}\}$ )。例えば、ノード  $i$  が勘定「現金」に、ノード  $j$  が勘定「部品」に対応し、注目期間中に取引「10万円の現金による部品購入」が発生したとすると、ノード  $i$  からノード  $j$  に有向枝が設定され、その重み  $t_{ij}$  として取引額 10万円が付与される。

[例1] 注目期間の期首貸借対照表を表1に、各勘定をノードに対応させ、期間中取引一覧(表2)を有向枝に対応させた取引ネットワークを図1に示す。

表1：期首貸借対照表

|    |       |
|----|-------|
| 資産 | 負債と資本 |
|----|-------|

|             |            |
|-------------|------------|
| 1.現金 (40万円) | 5.資本 (100) |
| 2.売掛金 (20)  |            |
| 3.原料 (30)   |            |
| 4.製品 (10)   |            |

表2：期間中取引一覧

|                    |                   |
|--------------------|-------------------|
| 1. 原料の現金購入         | ( $t_{13}=10$ 万円) |
| 2. 原料消費による製品生産     | ( $t_{34}=8$ )    |
| 3. 経費現金支出          | ( $t_{15}=11$ )   |
| 4. 現金売上による原料原価(寄与) | ( $t_{41}=12$ )   |
| 5. 現金による売上利益       | ( $t_{51}=7$ )    |
| 6. 売掛金による売上利益      | ( $t_{52}=5$ )    |

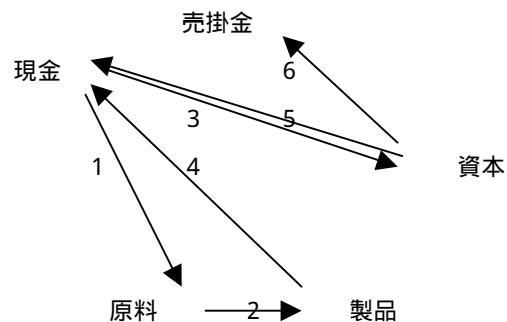


図1：取引ネットワーク

### 3. 節点解析とカットセット解析

有向ネットワーク  $G(N,A,T)$  の点—枝接続行列を  $S=\{S_{ik}\}$ 、 $T=\{t_{ij}\}$  の非零要素を枝列ベクトル表現して  $t=\{t_k\}$  とする。但し、 $S_{ik}$  は枝  $k$  が節点  $i$  を始点とする時に 1、終点とする時に -1、その他は 0 とする。

すると、取引枝ベクトル  $t$  と接続行列  $S$  を用いて、期間中の勘定ノード別変動額  $f_i$  は次式で表現できる。

## Topological Consideration on Double-entry Bookkeeping System

### - Part : Cutset Analysis for Transaction Flow -

Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{S} \mathbf{t} \quad (1)$$

この変動額ベクトルを用いて、期首貸借対照表の各勘定額を更新する。

次に、点—枝接続行列  $\mathbf{S}$  のかわりにより一般的なカットセット - 枝接続行列  $\mathbf{C} = \{C_{ik}\}$  を用いた変動額計算法を示す。節点数  $n$  のネットワークでは独立なカットセット数は  $n - 1$  であり、もし、 $n$  個のカットセットを選べば必ず従属である。但し、本議論ではカットセット集合が独立か、従属かは本質的ではなく、用途に応じてカットセット集合を選択することが肝要である。

有向ネットワークに対するカットセット - 枝接続行列  $\mathbf{C} = \{C_{ik}\}$  を以下で定義する（但し、「有向」と言っても枝方向と逆向きフローも可能なので、本質的には「無向」であり、「向き付け(oriented)」と言うべきであろう）。

$C_{ik}$  : カットセット  $i$  が有向枝  $k$  を同方向に含むとき  $+1$ 、逆方向に含むとき  $-1$ 、その他は  $0$  とする。

但し、この定義は  $S_{ik}$  の定義において節点カットセットの向きを節点から出る方向に設定した場合に相当する。又、単純なカットセットに限定しており、1つの枝を複数回横切るような複雑な人為的複合カットセット（後出）ではこの限りでない。 $\mathbf{C}$  を使って、カットセット別変動額  $\mathbf{f}_c$  を次式で計算する。  $\mathbf{f}_c = \mathbf{C} \mathbf{t} \quad (2)$

ここで、 $\mathbf{f}_c$  は各カットセットにより勘定ノードが分割されるが、その分割グループ間の変動額に相当する。

さて、 $1^T \mathbf{f}_s = 0$  が成立するが、カットセット集合に依存して  $1^T \mathbf{f}_c = 0$  は必ずしも成立するとは限らない。

[例2] 節点解析：例1に節点解析を適用する。

$\mathbf{t}$  と  $\mathbf{S}$  を以下に示す。

$$\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)^T = (t_{13}, t_{34}, t_{15}, t_{41}, t_{51}, t_{52})^T \\ = (10, 8, 11, 12, 7, 5)^T \quad (3)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

勘定ノード別変動額ベクトル  $\mathbf{f}_s$  は次式で計算する。

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{S} \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

すなわち、現金は2万円減少、売掛金は5万円増加、等々と読む。ここで、 $1^T \mathbf{f}_s = 2 - 5 - 2 + 4 + 1 = 0$  が成立している。これは、(5)式の接続行列の各列において、 $+1$  と  $-1$  が各々1回ずつ出現しているから(複式！)である。すなわち、点 - 枝接続行列でなくても、各列の和が零となれば、 $1^T \mathbf{f}_s = 1^T \mathbf{S} \mathbf{t} = \mathbf{0}^T \mathbf{t} = 0$  (6) より、この性質は保存する。会計処理において期末貸借対照表の勘定ノード別残高  $\mathbf{p}$  は期首貸借対照表の勘定ノード別残高  $\mathbf{q}$  と期間中勘定ノード別変動額  $\mathbf{f}_s$  を用いて、次式で計算する。

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} - \mathbf{f}_s \quad (7)$$

$$= (40, 20, 30, 10, 100)^T - (2, -5, -2, 4, 1)^T = (38, 25, 32, 6, 99)^T \quad (8)$$

(7)式において、 $\mathbf{p} = \mathbf{q} + \mathbf{f}_s$  とした方が、更新式として自然であるが、図1のネットワーク表示の行列表現として、主形式あるいは随伴形式を用いるかの差異で(7)式の表現形式となった[2]。情報ネットワークなどでは、行列の  $(i, j)$  要素をネットワークの有向枝  $(i \rightarrow j)$  に対応させる主形式が習慣的であり、これに従った。一方、会計学では、逆の随伴表現が習慣的であり、多少の違和感があるが本質的でない。[例3] カットセット解析（その1）：例1にカットセット解析を適用する。図2に示す5つのカットセットから構成されるカットセット集合に対するカットセット - 枝接続行列  $\mathbf{C}$  を用いてカットセット解析を行う。

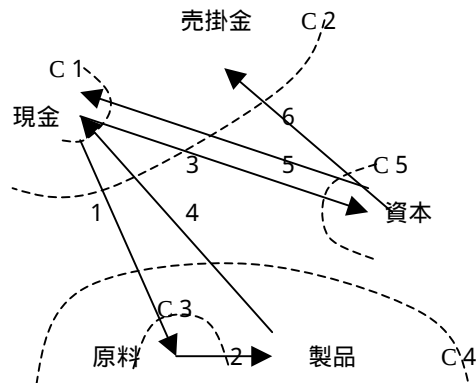


図2 カットセット解析例

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

ここで、(9)式のCの第i行がカットセットiに対応しており、カットセット1は現金勘定ノードの収支、カットセット2は、現金と売掛金を合計したキャッシュフロー収支、カットセット3は原料勘定ノードの収支、カットセット4は原料と製品を合計した棚卸資産の収支、カットセット5は資本収支を表している。従って、この場合のカットセット別変動額 $f_c$ は次式で計算する。

$$f_c = Ct = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

(10)式より、カットセット2に対応する $f_c$ の第2要素が「-3」なので、キャッシュフロー総額では3万円増加、又、カットセット4に対応する $f_c$ の第4要素が「2」なので、棚卸資産総額では、2万円減少と読むことが出来る。ここで、 $1^T f_c = 2 - 3 - 2 + 2 + 1 = 0$ となるが、これは偶然であり、(9)式において各列に+1と-1が1個ずつ出現していないことから、一般には $1^T f_c = 0$ は成立しない。例えば、 $t_2 = t_{34} = 9$ とすれば、 $f_c = (2, -3, -1, 2, 1)^T$ となり、 $1^T f_c = 1 \neq 0$ となることがわかる。

[例4]カットセット解析(その2):キャッシュフローと資産と資本に注目して、勘定別変動額を評価するには、(9)式において、2行、4行、5行を抜き出したカットセット行列(11)を考えればよい。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

従って、この場合のカットセット別変動額 $f_c$ は次式で計算する。

$$f_c = Ct = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

さて、この場合には、(11)式のカットセット行列の各列において、+1と-1が1回ずつ出現しているので、どんな $t$ に対しても $1^T f_s = 1^T Ct = 0^T t = 0$ が恒等式として成立する。すなわち、簿記計算の妥当性をチェックすることが可能である。但し、「総和=0ならば計算が正しい」と言う意味ではなく、「総和 $\neq 0$ ならば計算が誤りである」と言う意味である。すなわち、勘定ノード群を適当に仕分けすることにより、損益分析など会計処理に適用する際に好都合なデータ更新処理がカットセット解析により可能となることを示した。

#### 4. カットセット解析でのチェック行の構成

カットセット集合の選び方によっては、簿記計算の妥当性チェックのための恒等式 $1^T f_s = 0$ がカットセット解析では必ずしも成立するとは限らない。そこで、どのようにすれば、この恒等式と等価なチェック方式が採用できるかを考察する。

Cをカットセット-枝行列とすると次の定理が成立する。

定理1  $1^T C = 0^T$ ならば、 $t$ の値に依存せず $1^T f_s = 0$ となる。

(証明略)

もし、 $1^T f_s = 1^T Ct \neq 0$ となるように、カットセット行列を構成しているならば、定理1に従えば、仮想的なカットセット行 $c$ をCの最下部に付加したカットセット行列 $C'$ を構成して、強制的に、 $1^T C' = 0^T$ となるようにすればよい。

定理2  $1^T C \neq 0^T$ ならば、仮想的カットセット行ベクトル $c = -1^T C$ を元のカットセット行列の最下部に付加したカットセット行列 $C'$ を構成すれば、恒等的に $1^T f_s = 0$ が成立する。

(証明)  $1^T f_s = 1^T C' t = (1^T C + c) t = 0^T t = 0$  [QED]

[例5] 例3のカットセット解析において、カットセット5を除外して、カットセット1～4のみを考慮したカットセット行列を(13)式に示す。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

この場合のカットセット別変動額  $f_s$  は次式で計算する。

$$f_s = Ct = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$1^T f_s$  を計算すると、 $1^T f_s = 2 - 3 - 2 + 2 = -1 \neq 0$  となる。(13)式の列和を計算すると、 $1^T C = (0, 1, 2, -1, -2, -1)$  となることから、恒等式が成立しないことがわかる。

従って、定理 2 より、 $c = -1^T C = (0, -1, -2, 1, 2, 1)$  を、(13)式の最下位行に付加した新しいカットセット行列  $C'$  を構成する。

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

この新しい  $C'$  を使い、 $f_{c'}$  を計算すると(16)式を得る。

$$f_{c'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$1^T f_{c'} = 2 - 3 - 2 + 2 + 1 = 0$  と、常に簿記計算妥当性チェックのための恒等式が成立する。この妥当性チェックのための定理 2 の仮想的カットセット行ベクトル  $c$  は、誤り検出符号系のパリティチェックコードと同じ考えに基づいている。行ベクトル  $c = -1^T C$  は定理 2 での定義より仮想的・複合的カットセットに対応しているが、その意味を本例で説明する。

例 2 の節点解析での点一枝接続行列の各行は 5 つの節点 1, 2, 3, 4, 5 の節点カットセット行ベクトルに対応しており、各々  $s_1, s_2, \dots, s_5$  とする。

$$s_1 = (1, 0, 1, -1, -1, 0), s_2 = (0, 0, 0, 0, 0, -1), s_3 = (-1, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$s_4 = (0, -1, 0, 1, 0, 0), s_5 = (0, 0, -1, 0, 1, 1)$$

明らかに、

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = (0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0^T \quad (17)$$

ここで、(13)式のカットセット 1~4 に対応する行ベクトルを  $c_1, c_2, c_3, c_4$  とすると、 $c_1 = s_1, c_2 = s_1 + s_2, c_3 = s_3, c_4 = s_3 + s_4$  であることに注意すると、チェック行ベクトル  $c$  は次式で表現できる。

$$c = -1^T C = -(c_1 + c_2 + c_3 + c_4) = -(2s_1 + s_2 + 2s_3 + s_4) \quad (18)$$

(17)式を使用すると、 $c = -s_1 - s_3 + s_5$  (19)を得る。すなわち、チェック行ベクトル  $c$  に対応するカットセットは、節点 5 を内から外へ、節点 1, 3 を外から内へ切り離すカットセット群の複合体と解釈できる(図 3 参照)。

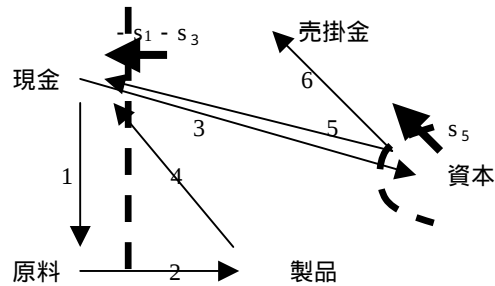


図3 チェック行ベクトルの複合カットセットとしての解釈

## 5、おわりに

キャッシュフローの構造分析においては、時間と空間の両面から考察する必要がある。本論文では、勘定ノード間の空間的なキャッシュフローの枠組みとして、複式簿記システムに注目して、カットセット解析を提案し、それに基づく位相幾何学的考察を行った。

時間面では、金銭の時間的価値[1]を考慮するが、本論文での考察結果に時間要素を入れて、キャッシュフローの時間的総合モデルを構築することが今後の課題の1つである。

## 参考文献

- [1]篠原正明：時間価値変換写像による設備投資計画・評価のモデル、統計数理研究所共同研究リポート 61、最適化：モデリングとアルゴリズム 5、pp.159~179(1994.10)
- [2]篠原正明：パス代数、大学院講義資料「ネットワーク論」、15 章(2000.4)